Formation stratégique des réseaux

Séminaire de l'École Normale Supérieure en Sciences Sociales

Christophe Bravard,
christophe.bravard@univ-grenoble-alpes.fr

École Normale Supérieure, 1ère et 2ème année

Introduction. Les travaux fondateurs

Sociologie

Le travail initial en sciences sociales visant à rendre compte de l'importance des réseaux sociaux est dû à Granovetter (1973).

- Interview de personnes vivant à Amherst Massachusetts.
- Comment ont-ils trouvé leur emploi ?
- Questions sur la force de leurs relations sociales mesurées par la fréquence des interactions sociales.
- Une proportion élevée d'emplois a été trouvée grâce aux liens "faibles".

Plus précisément sur les 54 personnes interrogées par Granovetter qui ont obtenu un travail par l'intermédaire d'une relation sociale,

- 16.7 % l'on obtenu grâce à un lien “fort” ;
- 55.7 % grâce à un lien “moyen” ;
- 27.6 % grâce à un lien “faible”.

- Granovetter insiste sur le fait que les liens faibles jouent un rôle essentiel dans la transmission d'informations entre les groupes.
- Cette idée est reprise par Burt (1992) qui insiste sur le pouvoir des agents qui sont "critiques" dans la transmission d'informations entre les groupes.

Économie

L'un des premiers auteurs a avoir introduit la notion de réseau en économie est Myerson (1977).

Son objectif était de compléter/étendre la valeur de Shapley (1953).

La valeur de Shapley vise à partager la valeur créée par un groupe de manière juste.

L'idée de la valeur de Shapley consiste à donner à chaque agent la moyenne de sa contribution marginale.

Valeur de Shapley, un exemple

- Nous notons $v : 2^N \to \mathbb{R}$ la fonction qui attribue à chaque groupe la valeur qu'il peur créer.
- $N = \{1, 2, 3\}$ et $v(S) = 1/4$ si $\#S = 1$, $v(S) = 3/5$ si $\#S = 2$ et $v(S) = 1$ si $\#S = 3$.

Valeur de Shapley, un exemple

- Nous notons qu'il y a 6 ordres possibles pour les agents $1, 2, 3$:

$$123, 132, 213, 231, 312, 321.$$

- Nous supposons que chacun de ces ordres survient avec la même probabilité.
- Pour calculer la valeur de Shapley, nous calculons la contribution marginale de chacun de ces agents dans chacun de ces ordres.

Nous avons $123 \rightarrow (V_1^m, V_2^m, V_3^m) = (0.25, 0.35, 0.4)$, et

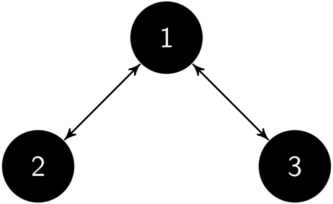
Ordres	vecteur contributions marginales
132	(0.25,0.4,0.35)
213	(0.35,0.25,0.4)
231	(0.4,0.25,0.35)
312	(0.35,0.4,0.25)
321	(0.4,0.35,0.25)

Nous calculons la moyenne des contributions marginales de l'agent 1, nous obtenons : $Sh_1 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = Sh_2 = Sh_3$.
Chaque agent obtient $1/3$ de la valeur créée par le groupe. Ceci est juste car tous les agents sont dans des positions symétriques.

Modification de Myerson

- Myerson propose de prendre en considération des situations où il existe un réseau social sous-jacent.
- Ce réseau social joue un rôle sur la communication entre les agents : deux agents ne peuvent communiquer que s'il existe un lien entre eux.

Supposons que le réseau social soit donné par la figure suivante :



- Dans ce cas, les agents 2 et 3 ne peuvent pas communiquer, ils ne peuvent pas former le groupe $\{2, 3\}$.
- Cette impossibilité conduit au fait que

$$v(\{2, 3\}) = v(\{2\}) + v(\{3\}) = 1/2.$$

Ordres	vecteur contributions marginales
123	(0.25,0.4,0.35)
132	(0.25,0.4,0.35)
213	(0.35,0.25,0.4)
231	(0.5,0.25,0.25)
312	(0.35,0.4,0.25)
321	(0.5,0.25,0.25)

Nous avons

$$Sh_1 = 0.367 > 0.33, Sh_2 = Sh_3 = 0.31 < 0.33.$$

L'agent 1 profite de sa position pour obtenir une plus grande part de la richesse créée par le groupe.

- Dans les différents papiers introduits jusqu'ici nous supposons que le réseau social est une donnée.
- Problème : les agents peuvent manipuler leur réseau social pour en tirer avantage.
- Exemple 1 : Certains étudiants/élèves font des efforts élevés afin d'intégrer certaines écoles et pouvoir profiter d'un réseau social/professionnel avantageux.
- Exemple 2. Les Medicis. Les Medicis ont été appelés les "parrains de la Renaissance". Leur accumulation de puissance au début du siècle à Florence, a été orchestré par Cosimo de Medicis.

- Cosimo a utilisé stratégiquement des unions matrimoniales, des relations économiques, et des "patronages" politiques.
- Si on effectue des calculs sur le réseau en dénombrant le nombre de familles avec lesquelles une famille donnée a des liens grâce aux unions matrimoniales, alors les Medicis sont les plus connectés.
- Le rapport avec les autres familles est de $\times 2$ à $\times 3$ (Les autres familles sont 2 à 3 fois moins connectées).
- En outre, si nous prenons en considération l'appartenance à des chemins entre deux familles (dans le réseau des marriages), alors les Medicis appartiennent à la moitié de ces chemins.

Si les réseaux sont importants dans la réalisation des objectifs des agents, alors un agent stratégique doit essayer de manipuler son réseau (social).

Plan :

1. Une approche théorique de la formation stratégique des réseaux coopérative

2. Extension 1 : La formation d'un réseau comme préalable à une interaction

3. Extension 2 : Réseaux de Nash, une modélisation non-coopérative de la formation des réseaux.

4. Conclusion : Quelques références bibliographiques

1. Une approche théorique de la formation stratégique des réseaux coopérative

Introduction

- Puisque les agents économiques bénéficient de leur réseau social, des agents rationnels devraient essayer de contrôler ce réseau.
- La formation d'un réseau social s'effectue par le truchement de liens bi-latéraux
- Deux agents i et j peuvent créer un lien.

  Les agents i et j doivent trouver de l'intérêt à la création (ou au maintien) de ce lien.
- Un agent i peut détruire unilatéralement un lien.

  Si l'agent i détruit un lien, alors il n'a pas intérêt au maintien de ce dernier.

Pour résumer, intuitivement nous considérons qu'un réseau social est **stable** s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

1. Aucune paire d'agents n'a intérêt à ajouter un lien (lorsqu'ils ne sont pas liés)
2. Aucun agent n'a intérêt a détruire un lien dans lequel il est impliqué.

Cette définition d'un réseau stable a été introduite en 1996 par Jackson et Wolinsky (Jour. Econ. Theo.)

Ils étudient les réseaux stables dans plusieurs types de situations.

- Le modèle de connexion. Dans ce modèle, les agents obtiennent des informations :
  1. des agents avec lesquels ils sont directement directement liés,
  2. des agents avec lesquels ils sont connectés indirectement.
- Le modèle de co-auteur. Les agents ont une production qui dépend de leur nombre de liens et du nombre de liens de leurs voisins.

  Exemple. Supposons que les agents soient des chercheurs qui souhaitent collaborer.
  Le nombre de liens d'un agent i augmente à sa production.
  Mais le nombre de liens de ses voisins est négatif pour la production de i car ces co-auteurs ont moins de temps pour collaborer.

Le cadre général

Nous identifions les joueurs avec les sommets d'un graphe, leurs relations sont identifiées avec les liens de ce graphe.

- L'ensemble des sommets étant donné, le graphe g est identifié avec sa matrice d'adjacence :

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & g_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n,1} & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

  où $g_{i,j} = 1$ s'il existe un lien entre i et j, et $g_{i,j} = 0$ sinon. Par hypothèse, pour tout agent i, nous avons $g_{i,i} = 0$.
- Nous notons $g + ij$ le réseau g identique au réseau g, sauf concernant l'entrée i, j : $g_{i,j} = 0$ et $[g + ij]_{i,j} = 1$.
- Nous notons $g - ij$ le réseau g identique au réseau g, sauf concernant l'entrée i, j : $g_{i,j} = 1$ et $[g - ij]_{i,j} = 0$.

Définition de la stabilité par paires

Notons $u^j : g \mapsto u^j(g)$ la fonction de paiement de l'agent j.

Un réseau est stable par paires si les deux conditions sont simultanément vérifiées.

1. Pour tout $g_{j,i} = 1$, $u^j(g) > u^j(g - ij)$ **et** $u^i(g) > u^i(g - ij)$;
2. Pour tout $g_{j,i} = 0$, $[u^j(g + ij) > u^j(g)] \Rightarrow [u^i(g + ij) < u^i(g)]$.

Le modèle de connexion, la fonction de paiement

Nous introduisons les notations suivantes :

- $w_{i,j} > 0$ si la valeur intrinsèque que l'agent i obtient grâce à l'agent j.
- $c_{i,j} > 0$ le coût du lien entre l'agent i et l'agent j.
- $d_{i,j}$ est la distance géodésique entre l'agent i et l'agent j ; il s'agit de la plus courte distance entre i et j dans le réseau.
- $\delta \in [0, 1]$ est un paramètre.

La fonction de paiement de l'agent j s'écrit :

$$u^j(g) = w_{jj} + \sum_{k \in N \setminus \{j\}} \delta^{t_{jk}} w_{jk} - \sum_{k : g_{k,j}=1} c_{jk}$$

La fonction est simplifiée de la manière suivante :

- $w_{jj} = 0$, $w_{ji} = 1$, et $c_{ji} = c$.

Nous avons :

$$u^j(g) = \sum_{k \in N \setminus \{j\}} \delta^{t_{jk}} - n_j(g)c$$

où $n_j(g)$ est le nombre de voisins de j dans g.

Nous introduisons des architectures de réseaux spécifiques utiles pour les résultats.

- Le réseau vide où pour tout $i, j \in N$, $g_{i,j} = 0$.
- Le réseau complet où pour tout $i \in N$, $j \in N \setminus \{i\}$, $g_{i,j} = 1$.
- L'étoile où il existe un agent, disons i^c, tel que $g_{i^c,j} = 1$ pour tout $j \neq i^c$, et $g_{i,j} = 0$ pour tout $j \in N \setminus \{i^c, j\}$.
- Une composante est un ensemble d'agents X tel qu'il existe un chemin entre ces agents, et aucun agent de X n'est connecté à un agent n'appartenant pas à X.

Proposition

Un réseau stable par paires a au plus une composante (non vide). De plus,

1. *Si* $c < \delta - \delta^2$, *alors l'unique réseau stable par paires est le réseau complet.*
2. *Si* $\delta - \delta^2 < c < \delta$, *alors l'étoile est un réseau stable par paires (généralement pas d'unicité)*

Démonstration

Nous montrons que le réseau stable par paires a au plus une composante.

- Supposons que g est stable par paires et contienne deux composantes non vides.
- Nous introduisons

$$u_i^{ij}(g) = \begin{cases} u_i(g+ij) - u_i(g) & \text{si } g_{i,j} = 1 \\ u_i(g) - u_i(g-ij) & \text{si } g_{i,j} = 0. \end{cases}$$

- Considérons $g_{i,j} = 1$. Alors, $u_i^{ij}(g) \geq 0$

- Supposons que k et ℓ appartiennent à une autre composante. Alors nous avons $u_\ell^{k,\ell} \geq 0$
- Puisque i est dans une composante avec j à laquelle k n'appartient pas, nous avons $u_k^{k,j} > u_i^{i,j} \geq 0$. En effet, k obtient δ^2 supplémentaire par rapport à i grâce au lien avec j.
- Pour des raisons similaires, $u_j^{k,j} > u_\ell^{k,\ell} \geq 0$, g n'est pas stable par paires, une contradiction.

Efficacité sociale

Du fait de l'existence d'externalités, en général, il n'y a pas de coincidence entre efficacité sociale et stabilité par paires.

- Cette non-coincidence survient pour des coûts de formation de liens modérés.
- Lorsque les coûts des liens sont très faibles (tendent vers 0), alors les agents forment le réseau complet. Ce réseau est efficace.
- Lorsque les coûts des liens sont très élevés, alors les agents forment le réseau vide. Ce réseau est efficace.

Intérêt de ce cadre

Ce modèle très simple prédit deux choses intéressantes :

- Les agents sont tous connectés (de manière indirecte).
- Il met en exergue la propriété de small world (les agents sont à une distance faible les uns des autres).
- La forte hétérogénéité des réseaux de manière empirique est ici très marquée avec l'étoile.

Le modèle du co-auteur

Nous introduisons $w_j = f_{ji}(n_i(g), n_j(g))$. La fonction de paiement de l'agent j est donnée par :

$$u_j = \sum_{i \in N : g_{j,i}=1} w_i - c(n_i),$$

où $c(n_i(g))$ est le coût supporté par un agent lorsqu'il a formé $n_i(g)$ liens.

Supposons que

$$f_{ji}(n_i(g), n_j(g)) = \frac{1}{n_i(g)} + \frac{1}{n_j(g)} + \frac{1}{n_i(g) + n_j(g)}.$$

Nous avons

$$u_j = 1 + \left(1 + \frac{1}{n_i(g)}\right) \sum_{i \in N : g_{j,i}=1} \frac{1}{n_j(g)}.$$

Pour éviter des problèmes techniques peu intéressants, nous supposons que n est pair.

Proposition

Un réseau stable par paires peut être partitionné en des composantes en fonction des degrés des agents. Les agents qui appartiennent à une partie sont tous liés entre eux et n'ont aucun liens avec les agents des autres parties.

2. Extension 1 : La formation d'un réseau comme préalable à une interaction

Le cadre proposé précédemment permet de modéliser des situations où les agents forment un réseau avant d'interagir dans une certaine activité économique.

Nous allons présenter successivement deux applications.

Réseau de collaboration en R&D

Cet exemple est issu de Goyal et Joshi (2003, Games and Econ. Behav.).

Nous supposons un cadre où :

1. Les firmes créent des collaborations en R&D bi-latérales.
2. Les firmes se concurrencent en quantité (oligopole de Cournot).

- Nous supposons que les collaborations permettent de réduire les coûts marginaux (innovations de procédés).
- Nous supposons un modèle de formation de réseau stratégique avec transmission 1-tronquée.

  Lorsque la transmission est 1-tronquée, les informations d'un agent i ne sont accessibles que pour ses voisins.

Nous présentons maintenant les principales hypothèses. Soit p le prix, q_i la production réalisée par la firme i.

- La fonction de demande inverse est donnée par :

$$p(Q) = \alpha - Q,$$

  avec $Q = \sum_{i \in N} q_i$.

- La fonction de **coût marginal** de la firme i est donnée par

$$c(g) = \gamma_0 - n_i(g)\gamma.$$

Rappelons que le jeu est en deux étapes. Nous résolvons d'abord l'oligopole afin d'obtenir les fonctions de paiement réduites, puis nous cherchons les réseaux stables par paires.

Résolution de l'oligopole

À réseau g donné, nous avons pour tout i :

$$\pi_i(q_i) = \left(\alpha - \sum_{i \in N} q_i - c_i(g)\right) q_i$$

La fonction de profit est de type $-x^2$, elle admet un maximum où sa dérivée s'annule.

Nous avons, à l'équilibre,

$$\pi_i'(q_i) = \left(\alpha - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q_j - c_i(g)\right) - 2q_i = 0$$

$$2q_i = \left(\alpha - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q_j - c_i(g)\right)$$

$$\sum_{i \in N} 2q_i = \sum_{i \in N} \left(\alpha - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q_j - c_i(g) \right),$$

d'où

$$2 \sum_{i \in N} q_i = n\alpha - \sum_{i \in N} c_i(g) - \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q_j$$

$$2 \sum_{i \in N} q_i = n\alpha - \sum_{i \in N} c_i(g)) - (n-1) \sum_{i \in N} q_i$$

En conséquent,

$$\sum_{i \in N} q_i = \frac{n\alpha \sum_{i \in N} c_i(g)}{n+1} \Rightarrow \sum_{j \in N \setminus \{i\}} q_j = \frac{n\alpha - \sum_{i \in N} c_i(g) - (n+1)q_i}{n+1}.$$

Nous obtenons :

$$2q_i = \left(\alpha - \left(\frac{n\alpha - \sum_{i\in N} c_i(g)) - (n+1)q_i}{n+1}\right) - c_i(g)\right)$$

$$(n+1)q_i = \left(\alpha + \sum_{i\in N} c_i(g)) - (n+1)c_i(g)\right)$$

Il suit que $(n+1)q_i$ est égale à :

$$\alpha + n\gamma_0 - \gamma\left(\sum_{j\in N\setminus\{i\}} n_j(g) + n_i(g)\right) - (n+1)\gamma_0 + \gamma(n+1)n_i(g),$$

et finalement :

$$q_i = \frac{\alpha - \gamma_0 + n\gamma n_i(g) - \gamma\sum_{j\in N\setminus\{i\}} n_j(g)}{n+1}.$$

Dans un oligopole à la Cournot linéaire, le profit est égal au carré de la quantité. Nous avons :

$$\pi_i(g) = (q_i)^2 = \left(\frac{\alpha - \gamma_0 + n\gamma n_i(g) - \gamma \sum_{j \in N \setminus \{i\}} n_j(g)}{n+1} \right)^2.$$

Remarquons que la fonction de profit est de la forme :

$(a_1 + a_2 x - a_3 y)^2$, avec

$$a_1 = \frac{\alpha - \gamma_0}{n+1} > 0, a_2 = \frac{n\gamma}{n+1} > 0, a_3 = \frac{\gamma}{n+1} > 0,$$

et $x = n_i(g)$, $y = \sum_{j \in N \setminus \{i\}} n_j(g)$.

Notons que la fonction

$$f : (x, y) \mapsto (a_1 + a_2 x - a_3 y)^2, a_1, a_2, a_3 > 0$$

admet comme Hessienne, H, la matrice :

$$H = \begin{pmatrix} 2a_2 & 2a_2a_3 \\ 2a_2a_3 & 2a_3 \end{pmatrix}$$

Nous avons deux informations importantes :

$$f''_{11} > 0, f''_{12} < 0.$$

1. $f''_{11} > 0$: Le profit marginal obtenu par une firme i croît avec le nombre liens formés par i.
2. $f''_{12} < 0$: Le profit marginal obtenu par une firme i décroît avec le nombre total de liens formés par les autres firmes.

Un réseau groupe dominant est un réseau qui contient deux groupes de firmes, G_1 et G_2.

1. Si $i, j \in G_1$, alors $g_{i,j} = 1$.
2. Si $i \in G_2$, alors $g_{i,\ell} = 0$ pour tout $\ell \in N$.

Proposition

Dans un oligopole à la Cournot, où le coût de formation unitaire des liens est F, un réseau stable par paires est un réseau groupe dominant.

Intérêt et intuition du résultat

Cette proposition met en avant le fait que des firmes initialement identiques seront possiblement dans une position très asymétrique à l'équilibre (en terme de coût et donc de profit).

L'intuition du résultat est assez simple. Suppons un réseau g non vide.

- Considérons une firme i qui a créé un lien. Du fait de la propriété de convexité de la fonction de profit, elle a toujours intérêt à former un lien supplémentaire.

  Conclusion. Si deux firmes i et j ont créé au moins un lien un réseau stable par paires alors $g_{i,j} = 1$.

- Supposons une firme i qui a créé au moins un lien et une firme j qui n'a créé aucun lien.
  Par convexité la firme i a intérêt à former un lien supplémentaire avec j.
  La firme j est confrontée à un nombre de liens total plus élevé que i.
  En effet, nous avons $G = \sum_{i \in N} \sum_{j \in N \setminus \{i\}} g_{i,j}$, d'où

$$\sum_{\ell \in N \setminus \{i\}} g_{i,\ell} = G - n_i(g), \text{ et } \sum_{\ell \in N \setminus \{j\}} g_{j,\ell} = G - n_j(g).$$

  Puisque $n_i(g) > 0 = n_j(g)$, nous avons :

$$G - n_i(g) < G - n_j(g).$$

- La firme j obtient un profit marginal du lien entre i et j plus petit que le profit marginal obtenu par la firme i.
- Il existe donc F tel que la firme j n'a pas intérêt à accepter le lien proposé par la firme i puisque $f''_{12} < 0$.

Contribution à un bien public

Dans ce modèle, nous prenons un considération un modèle 2-tronqué.

- L'ensemble de joueurs est N.
- Chaque joueur i doit choisir un niveau de contribution à un bien public x_i.
- Le bénéfice issu de la production du bien public est donné par :

$$u_i(x) = x_i + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j$$

- Chaque lien coûte F.
- Le coût associé à la contribution x_i est égal à :

$$f_i(x_i, g) = 1/2 \left(\frac{x_i}{(n_i(g) + 1)} \right)^2 .$$

- La fonction de paiement de l'agent i s'écrit :

$$U_i(x) = x_i + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} x_j - f_i(x_i, g)$$

- Nous calculons la contribution optimale de l'agent i à un réseau g donné.
- Nous obtenons :

$$U_i'(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{x_i}{(n_i(g)+1)^2} = 0 \Rightarrow x_i = (n_i(g)+1)^2.$$

- La fonction de profit réduite s'écrit de la manière suivante :

$$\pi_i(g) = \frac{(n_i(g)+1)^2}{2} + \sum_{j \in N \setminus \{i\}} (n_j(g)+1)^2.$$

- Nous avons :

$$\pi_i(g+ij) - \pi_i(g) = \frac{9}{2} + n_i(g) + 2n_j(g)$$

- La fonction de profit marginal est croissante avec $n_i(g)$ et $n_j(g)$.

Proposition

Un équilibre stable par paires, g, existe toujours. Si g est un réseau symétrique, alors il est vide ou complet. Si le réseau est asymétrique, alors il contient une seule composante.

Nous observons la possibilité de situations asymétriques entre les agents alors qu'ils sont initialement identiques.

3. Extension 2 : Réseaux de Nash, une modélisation non-coopérative de la formation des réseaux

Ce cadre a été présenté par Bala et Goyal (Ecta, 2000).

- Nous avons supposé que le coût était supporté de manière égalitaire par les deux protagonistes impliqués dans la formation du lien.
- Nous supposons que l'un des agents supporte l'intégralité du coût associé à la création du lien.
- Nous supposons que les agents obtiennent toujours un paiement positif de la formation d'un lien.
- Nous supposons que les informations ne sont pas altérées par la distance qui sépare deux agents.

Notons que la matrice $g \times g$ décrit l'existence de chaine de longueur 2 entre les joueurs. Supposons la matrice g suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous avons :

$$g^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Remarquons qu'une entrée positive (hors diagonale) correspond à l'existence d'une chaine de longueur 2 entre deux joueurs, ici entre le joueur 2 et 3.

En utilisant le même raisonnement, la matrice g^n indique l'existence de chaine de longueur n entre deux joueurs.

- En utilisant ces résultats, nous remarquons que deux joueurs i et j sont connectés dans g si $G_{i,j} > 0$, $j \neq i$ avec : $G = \sum_{k \in N} g^k$.
- Notons $\eta_i(g) = \#\{j \in N : G_{i,j} > 0\}$.
- La fonction de paiement d'un agent i, après normalisation de la valeur de l'information d'un agent, s'écrit :

$$u_i(g) = \eta_i(g) - cn_i(g).$$

Concept solution

- Une stratégie est un $(n-1)$-uple $\vec{g}_i = (g_{i,0}, g_{i,1}, \ldots, g_{i,i-1}, g_{i,i+1}, \ldots, g_{i,n})$.
- Le profil $\vec{g}_{-i} = (\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_{i-1}, \vec{g}_{i+1}, \ldots, \vec{g}_n)$ résume toutes les stratégies employées par les joueurs autres que i.
- Le réseau g peut être identifié à $(\vec{g}_i, \vec{g}_{-i})$.

- Le concept solution utilisé ici est l'équilibre de Nash.
- Nous cherchons un profil de stratégie tel qu'aucun joueur n'a intérêt à modifier son choix.
- $\vec{g}_i$ est une meilleure réponse face à $\vec{g}_{-i}$ ssi quel que soit $\vec{g}_i'$, nous avons :
$$u_i(\vec{g}_i, \vec{g}_{-i}) \geq u_i(\vec{g}_i', \vec{g}_{-i}).$$
- Un équilibre de Nash est une situation où tous les agents jouent une meilleure réponse.
- Un équilibre de Nash est une situation où tous les agents jouent une meilleure réponse stricte $((\geq) \rightarrow (>))$.

Proposition

Un réseau de Nash est vide ou connecté ($G_{i,j} > 0$) pour tout $i, j \in N$.
Un réseau de Nash strict non vide est une étoile.

Intuition.

1. Si i a formé un lien avec j, alors il n'existe pas d'agent isolé (oui ?).
   S'il existe deux composantes, un agent dans chaque composante a formé un lien disons i et j.
   Nous avons sans perte de généralité $u_i(g) \geq u_j(g)$. Si j détruit tous ses liens et forme un lien avec i, alors il obtient un paiement supérieur à $u_j(g)$.
2. Si $g_{i,j} = g_{j,k} = g_{k,\ell}$ alors k peut supprimer son lien avec k et créer un lien avec j.

Conclusion : Quelques références bibliographiques

Nous présentons quelques papiers importants de la littérature. En particulier ceux qui ont été à l'origine de plusieurs extensions.

- Bramoullé et Kranton, Public goods in networks, Journ. Econ. Theo., 2007.
  - Les auteurs considèrent le réseau comme une donnée.
  - Les agents fournissent des efforts pour créer un bien public en fonction des efforts fournis par leurs voisins ;
  - Ces efforts sont complémentaires.
  - L'objectif est de savoir si les efforts des agents tendent à être identiques ou différents.

- Ballester, Calvó-Armengol, Zenou, Who's Who in Networks. Wanted : The Key Player, 2006, Ecta.
  - Les agents décident d'un certaine quantité d'effort en fonction des efforts de leurs voisins.
  - L'équilibre de Nash obtenu est proportionnel à un indicateur de centralité (la centralité de Bonacich)
  - Analyse de l'effet du retrait d'un agent sur le niveau d'effort agrégé.
  - Caractérisation des agents clés grâce à des indicateurs "d'inter-centralité".

- Calvó-Armengol, Jackson, The Effects of Social Networks on Employment and Inequality, 2004, Am. Econ. Rev.
    - Obtention d'informations sur les emplois vacants grâce au réseau social.
    - Leur modèle prévoit que la durée du chômage est corrélée entre les agents.
    - Ceci s'explique par la présence d'une externalité négative des chômeurs. Chaque chômeur réduit la possibilité d'obtenir de l'information sur un emploi vacant de l'ensemble de ses voisins.