



Concours externe de l'agrégation du second degré

Section sciences économiques et sociales

Programme et bibliographie de la session 2016

Épreuves d'admission : programme de mathématiques et statistiques

Cette épreuve a un double objectif, à savoir s'assurer que les candidats :

- maîtrisent certains outils mathématiques et statistiques que les professeurs de sciences économiques et sociales doivent utiliser dans l'enseignement en lycée et en classes préparatoires aux grandes écoles.
- ont une culture mathématique et statistique suffisante pour la compréhension et la mise en œuvre des théories contemporaines et des analyses socio-économiques quantitatives, qui sont, soit étudiées en second cycle universitaire, soit présentées dans des ouvrages ou des revues spécialisées sous un aspect formalisé.

Pour ce faire, les candidats doivent maîtriser le raisonnement logique, le formalisme mathématique utilisé dans les théories économiques, sociologiques ou démographiques :

- Ils doivent connaître les notations scientifiques classiques : les notions d'éléments d'un ensemble, de sous-ensembles, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire ainsi que les notations des ensembles de nombres et des intervalles.
- Ils doivent savoir utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou », utiliser à bon escient les quantificateurs universels et existentiels, les implications et équivalences, ainsi que les bases du raisonnement : démonstration par l'absurde et par récurrence, réciproque et contraposée d'une proposition.

Les programmes de mathématiques de première et de terminale ES en vigueur doivent être très bien assimilés. S'ajoutent à ces contenus quelques approfondissements.

I - Analyse

Fonctions numériques d'une variable réelle

Fonctions usuelles (polynômes, fonctions rationnelles, racine carrée, inverse, logarithme népérien, exponentielle de base e et de base a réel, fonctions puissance réelle). Les fonctions trigonométriques sont hors programme.

Limites : fonctions usuelles, opérations, croissances comparées, méthodes pour lever des indéterminations.

Continuité (en un point et sur un intervalle, prolongement par continuité), dérivabilité (en un point et sur un intervalle), convexité ; tableau de variation, extrema, courbe représentative.

Formules de Taylor : elles doivent essentiellement servir à obtenir des développements limités pour l'étude locale d'une fonction. Approximation affine et développement limité d'ordre 2 : formules usuelles au voisinage de 0, interprétation géométrique.

Primitives, intégrale d'une fonction (continue par morceau sur un segment et sur un intervalle quelconque), lien avec l'aire sous la courbe représentative de la fonction, propriétés (linéarité, relation de Chasles, utilisation de la parité), techniques d'intégration (intégration par parties, changement de variable).

Fonctions numériques de plusieurs variables

Dérivées partielles d'ordre 1 et 2 (les problèmes de continuité et de dérivabilité en un point particulier ne sont pas au programme), gradient (propriétés géométriques), différentielle d'ordre 1 et 2, optimisation avec ou sans contrainte (étude de la forme quadratique différentielle seconde – dont la représentation matricielle est la matrice Hessienne – en lien avec le développement de Taylor), méthode du Lagrangien.

Courbes de niveau, fonction de Cobb-Douglas (homogénéité, élasticité).



Concours externe de l'agrégation du second degré

Section sciences économiques et sociales

Programme et bibliographie de la session 2016

Suites

Suites définies par une formule de récurrence ($u_{n+1} = f(u_n)$) ou une formule explicite ($u_n = f(n)$), représentations graphiques, sens de variation, suites majorées, minorées, convergence ; suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques. Applications aux taux d'intérêt. Des exercices utilisant des suites récurrentes linéaires d'ordre 2 pourront être proposés mais aucune théorie n'est exigible sur ce type de suites.

Séries

Définition, somme partielle associée, convergence dans des cas particuliers : séries de terme général q^n , séries de Riemann, développement en série de l'exponentielle, application pour le calcul de l'espérance et de la variance de variables aléatoires discrètes.

II - Algèbre et géométrie

Graphes : sommets, sommets adjacents, arrêtes, degré d'un sommet, ordre d'un graphe, chaîne, longueur d'une chaîne, graphe complet, graphe connexe, chaîne eulérienne, matrice d'adjacence associée à un graphe. Recherche du plus court chemin sur un graphe pondéré connexe.

Résolution d'un système linéaire d'équations.

Espaces vectoriels de dimension finie, sous-espaces vectoriels : bases, dimension. On se limitera aux espaces \mathbb{R}^n et aux espaces de matrices colonnes à coefficients réels.

Produit scalaire, distance, norme, famille de vecteurs orthonormés. Projection orthogonale (la théorie générale des projections orthogonales n'est pas un attendu du programme).

Matrices à coefficients réels, opérations sur les matrices. Changement de base.

Valeurs propres, vecteurs propres et sous-espaces propres, diagonalisation d'une matrice carrée.

Calcul de la puissance $n^{\text{ième}}$ d'une matrice carrée.

Équations de droites dans le plan, de plans dans l'espace.

III – Statistique et probabilités

Statistique descriptive univariée

Présentation de données statistiques : tableaux à simple entrée. Diagrammes en bâtons, histogrammes (avec classes de même amplitude ou non). Diagrammes circulaires, en barre, box-plots ou « boîte à moustaches ». Polygones des effectifs ou des fréquences cumulés.

Paramètres de position : moyenne, mode, médiane, quartiles, déciles.

Paramètres de dispersion : étendue, écart interquartile, variance, écart-type, coefficient de variation.

Paramètres de concentration : courbe de Lorenz, médiale et indice de Gini (défini uniquement comme rapport de deux aires).

Indices simples et synthétiques : définitions et propriétés (Laspeyres, Paasche, Fisher).

Statistique descriptive multivariée

Présentation de données statistiques : tableaux à double entrée, distributions conjointe, marginales et conditionnelles. Formules de décomposition de la moyenne et de la variance, variances inter et intra. Ajustement affine : principe de la méthode de Mayer, de la méthode des moindres carrés. Coefficient de corrélation linéaire.

Cas de p variables quantitatives : matrice de covariance, de corrélation linéaire, analyse en composantes principales, régression linéaire multiple.

Analyse des correspondances simples dans le cas de 2 variables qualitatives.



Concours externe de l'agrégation du second degré

Section sciences économiques et sociales

Programme et bibliographie de la session 2016

Statistique inférentielle

Estimateur : propriétés (biais, risque quadratique, convergence) ; estimation ponctuelle ou par intervalle de confiance,

Tests d'hypothèses : risques d'erreur, région critique. Application aux tests du Chi-deux (ajustement à une loi, liaison de 2 variables qualitatives), test de la moyenne, test d'égalité des moyennes par analyse de la variance.

Modèle linéaire (cas de la régression linéaire simple ou multiple) : estimateur des moindres carrés, test de Student de signification des coefficients de régression.

Lecture de sorties de logiciels dans le cas de traitements informatiques de données.

Interprétation des résultats d'une analyse statistique unidimensionnelle ou multidimensionnelle de données socio-économiques.

Probabilités

Événements aléatoires, probabilité dans le cas d'un univers fini ou infini.

Probabilités conditionnelles, formule des probabilités totales, théorème de Bayes. Événements indépendants. Graphes probabilistes : matrice de transition, état stable d'un graphe probabiliste.

Variables aléatoires réelles discrètes ou continues : fonction de répartition. Loi d'une variable aléatoire discrète, fonction densité de probabilité.

Loi de probabilité de variables aléatoires usuelles : uniformes (discrète et continue), Bernoulli, binomiale, géométrique, Poisson, normales, exponentielle.

Vecteurs aléatoires : notion d'indépendance de variables aléatoires discrètes ou continues ; lois conjointe, marginales, conditionnelles d'un couple de variables aléatoires discrètes.

Espérance mathématique et variance d'une variable aléatoire discrète ou continue (définition et propriétés). Covariance de deux variables aléatoires discrètes.

Loi des grands nombres, théorème central limite, et application aux approximations d'une loi binomiale ou de Poisson par une loi normale. Approximation d'une loi binomiale par une loi de Poisson.

Intervalle de fluctuation; distribution d'échantillonnage.

Contexte de l'épreuve

Si certains exercices pourront être posés dans le seul cadre des mathématiques, d'autres pourront s'inscrire dans des contextes économiques et sociaux supposés connus des candidats. Parmi ceux-ci, on citera quelques exemples :

- les techniques d'analyse des variables économiques : valeur nominale (ou en valeur ou à prix courants), valeur réelle (ou en volume ou à prix constants), indice des prix ;
- le tableau entrée-sortie (TES) en comptabilité nationale : coefficients techniques, modèle de Léontieff;
- des notions relatives aux phénomènes monétaires : taux de change, parité des pouvoirs d'achat ;
- des modèles de fiscalité : impôt proportionnel, impôt progressif (par tranches) ;
- les notions de base de la microéconomie : analyse du choix du consommateur (contrainte budgétaire, utilité, courbes d'indifférence, élasticités, taux marginal de substitution), analyse du choix du producteur (productivité moyenne, marginale, rendements croissants, décroissants, constants, coût total, moyen, marginal), équilibre en concurrence pure et parfaite, en situation de monopole, surplus, déplacements sur les courbes d'offre et de demande ;
- les outils d'analyse de la consommation : propension marginale, moyenne à consommer, élasticités point et élasticités arc (prix, revenu, demande), élasticité croisée, structure de la consommation et coefficients budgétaires ;



Concours externe de l'agrégation du second degré

Section sciences économiques et sociales

Programme et bibliographie de la session 2016

- les bases du calcul économique et financier : intérêts simples, intérêts composés, rentabilité économique, rentabilité financière, valeur actualisée, taux de rendement interne ;
- les techniques de réalisation d'enquêtes sociologiques et d'analyse de leurs résultats ;
- les principaux outils d'analyse des réseaux sociaux ;

Remarques concernant la calculatrice

Les candidats doivent savoir maîtriser les instruments qu'utilisent leurs élèves et en premier lieu des calculatrices graphiques : outre les traitements numériques usuels, ils doivent être capables de fournir la courbe représentative d'une fonction, un tableau de valeurs d'une fonction ou d'une suite, de connaître les fonctions de la calculatrice pour toutes les opérations sur matrices et vecteurs ainsi que les fonctions statistiques, en particulier celles donnant un ajustement affine, les calculs de probabilités utilisant les lois usuelles, le solveur.