

Essai sur la sélection d'équilibres en théorie des jeux

Olivier Tercieux

16 Septembre 2004

1 Introduction

La majorité des études économiques et plus généralement des sciences sociales étudient des situations où le bien-être retiré d'une action par un individu dépend des stratégies adoptées par les autres individus. Ces situations d'*interactions stratégiques* font l'objet depuis le début du siècle d'une analyse formelle : la théorie des jeux.

La théorie des jeux étudie ces situations de décisions et en analyse les issues possibles à l'aide de concepts d'équilibres. En économie, le concept d'équilibre (de théorie des jeux) le plus utilisé est le concept d'équilibre de Nash (Nash, (50)). Il assigne à chaque joueur un ensemble de stratégies compatibles avec les trois hypothèses suivantes :

- La rationalité instrumentale de chaque joueur (au sens d'une maximisation de sa fonction de paiement à anticipation sur les stratégies des autres donnée) ;
- La connaissance par chaque joueur de sa propre fonction de paiement ;
- La connaissance par chaque joueur des stratégies des autres joueurs.

L'affaiblissement des deux premières hypothèses fait l'objet d'une étude détaillée¹. Comme nous le verrons, la justification de la dernière hypothèse est souvent difficile.

Quel fondement à l'hypothèse de connaissance des stratégies des autres ?

Si on ne suppose rien sur le degré de connaissance que les agents ont sur les stratégies des autres joueurs, il faut expliciter un processus par lequel les croyances des joueurs sur les stratégies des autres se forment. En supposant que l'on conserve les deux premières hypothèses, les tentatives d'explicitation de la formation de ces croyances peuvent être séparées en deux approches : divinatoires et évolutionnaires.

a) Une justification divinatoire ?

L'approche divinatoire a pour objectif d'étudier la formation de ces croyances par le biais du raisonnement des agents. Afin de former leurs croyances, les agents exploitent optimalement l'information qu'ils ont à leur disposition sur le jeu et sur les autres joueurs. En ce sens là, la *rationalité cognitive*² est supposée parfaite. (Une telle démarche peut être trouvée par exemple dans l'approche de Bernheim (84) et Pearce (84) connue sous le nom de rationalisabilité).

Ainsi par un raisonnement (souvent complexe), les agents parviennent à exclure la possibilité que les autres joueurs choisissent certaines stratégies. Néanmoins, dans ces modèles, les agents

¹Voir pour la première les nombreux travaux sur le "satisficing" de H. Simon, mais aussi, par exemple, M^cKelvey et Palfrey (95), Weibull (95). Sur la seconde hypothèse voir Harsanyi (67-68), et Mertens et Zamir (85).

²Rappelons que la rationalité cognitive traduit l'adéquation que réalise l'agent entre les informations qu'il possède et les représentations qu'il se forme, et traduit son efficacité dans la construction et la gestion de son savoir. Walliser (2000) fournit une analyse détaillée des différents types de rationalité à l'oeuvre dans les prises de décisions.

parviennent rarement à prévoir parfaitement ce que les autres joueurs vont jouer. Une justification divinatoire de l'hypothèse d'une connaissance parfaite des stratégies des autres joueurs, et donc de l'équilibre de Nash semble donc difficile.

b) Une justification évolutionnaire ?

Alors que le procédé divinatoire est un processus mental (de calcul par les agents), l'approche évolutionnaire propose une explicitation de la formation des croyances inscrite dans le temps. Les agents forment leurs croyances en adoptant une règle simple affaiblissant la rationalité cognitive. Ils supposent que leurs opposants joueront en moyenne les mêmes stratégies que par le passé. Ainsi, en conservant les hypothèses de rationalité instrumentale et de connaissance par les joueurs de leurs propres fonctions de paiements, les joueurs prennent une meilleure réponse face à la fréquence empirique des actions passées de leurs opposants. Une fois que les joueurs ont joué suffisamment longtemps un équilibre de Nash (strict), les joueurs anticipent parfaitement ce que les autres vont jouer. Néanmoins, la convergence de ces dynamiques (de meilleures réponses) vers ces équilibres est assurée dans des classes de jeux très réduite³.

Ainsi, l'hypothèse de connaissance des stratégies des autres joueurs semble difficile à fonder d'un point de vue divinatoire ou évolutionnaire.

Le cas particulier de la risque-dominance de Harsanyi et Selten (1988) :

La notion d'équilibre risque-dominant de Harsanyi et Selten (1988) peut-être interprétée comme un équilibre où les stratégies des joueurs sont relativement prudentes. Plus précisément, une déviation des autres joueurs est relativement peu coûteuse pour un joueur choisissant la stratégie d'équilibre. Contrairement aux autres équilibres de Nash, il a été montré qu'on peut donner un fondement à la fois divinatoire et évolutionnaire à l'équilibre risque-dominant⁴. Bien entendu, ces travaux présupposent l'existence d'un tel équilibre. Mais la classe de jeux où l'existence de cet équilibre est assurée est extrêmement restrictive. Ainsi, un *problème d'inexistence* semble émerger...

2 Présentation de la thèse

2.1 Un nouveau concept d'équilibre : une généralisation de la risque-dominance

La thèse (document [I]) propose un nouveau concept d'équilibre (l'ensemble minimal p -meilleure réponse). Ce concept élargit l'idée de Harsanyi et Selten à des ensembles d'actions. Plus précisément, il fournit un ensemble d'actions pour chaque joueur qu'il est prudent de jouer (au sens de la risque-dominance). Nous montrons qu'il possède des propriétés d'existence dans des classes très larges de jeux⁵, évitant par là même le problème d'inexistence associé à la risque-dominance de Harsanyi et Selten. De plus, dans ces nombreux jeux, cet ensemble est défini de façon unique. Il a donc les *propriétés d'existence et d'unicité*.

La thèse montre que ce concept conserve les propriétés de la risque-dominance et généralise donc le travail de Harsanyi et Selten (1988). En effet, lorsque l'équilibre risque-dominant existe, il coïncide avec notre ensemble (qui se réduit donc à un singleton). De plus, nous allons voir que tout comme l'équilibre risque-dominant peut être fondé d'un point de vue évolutionnaire ou divinatoire, l'ensemble défini par notre concept conserve ces propriétés.

³Shapley (64) fournit le premier exemple de ce phénomène, voir Weibull (1995) pour des références récentes sur ces propriétés générales de non-convergence.

⁴Pour le fondement divinatoire, voir Carlsson et van Damme (93). Pour un fondement évolutionnaire, voir Young (93).

⁵Plus précisément, les jeux où les ensembles d'actions sont compacts dans un espace métrique et les fonctions de paiements continues.

2.2 Un fondement évolutionnaire

Le document [II] co-écrit avec Jacques Durieu et Philippe Solal donne un fondement évolutionnaire à ce concept d'équilibre. Dans ce document, nous supposons que les agents croient que leurs opposants vont jouer "en moyenne" les mêmes actions que dans le passé et affaiblissent donc la rationalité cognitive de ces derniers. De plus, une fois formées leurs croyances, ils prennent une meilleure réponse avec une probabilité proche de 1. Nous montrons par la suite que ces agents se coordonnent à long terme sur les actions de l'ensemble défini par notre concept; dès lors ceci fournit une justification évolutionnaire à notre concept d'équilibre. Il est à noter qu'en améliorant les capacités cognitives des agents, le document [I] montre que ce résultat est robuste⁶.

Néanmoins, dans ce cadre adaptatif où nous nous concentrons sur les profils d'actions joués à long terme, le délais pour atteindre ces actions peut être très long. Nous proposons dans les documents [III] un fondement divinatoire (statique) à notre concept d'équilibre.

2.3 Un fondement divinatoire

Les documents [III] et [IV] s'inspirent d'une littérature récente : les "global games" initiée par Carlson et van Damme (93) puis développée dans de nombreux papiers par S. Morris et H.S. Shin (voir le survey de Morris et Shin (2003)). Cette littérature montre qu'en introduisant une légère information incomplète, des agents à rationalité cognitive et instrumentale parfaite se coordonnent uniquement sur l'équilibre risque-dominant.

Bien entendu, ces résultats supposent l'existence d'un équilibre risque-dominant, ce qui - comme nous l'avons vu - n'est vérifié que pour une classe de jeux très particulière. Nous montrons que de façon générale, ces agents vont se coordonner sur l'ensemble défini par le concept proposé dans la thèse.

3 Conclusion

Il est intéressant de noter que les document [III] et [IV] montrent que l'argument d'unicité des "global games" ne tient pas dans des cadres généraux. En effet, la majorité des travaux de ce courant déduisent de leur résultat d'unicité d'équilibre que les défauts de coordinations n'existent pas en économie. Notre résultat permet de relativiser la critique portée par Morris et Shin (voir Morris et Shin (2001)) à l'égard des modèles économiques à équilibres multiples, et plus particulièrement à la nouvelle économie Keynesienne. En effet, en dehors des classes de jeux très particulières considérées par ces modèles, les agents se coordonnent sur un ensemble composé de plusieurs actions. Ainsi, l'indétermination et l'impact sur le cycle économique des croyances extrinsèques chers à la nouvelle économie Keynesienne semble être une idée robuste.

Documents de travail cités :

[I] Tercieux, O. (2003) " p -Best Response Set ", à paraître dans *Journal of Economic Theory*.

[II] Durieu, J., Solal, P. et Tercieux, O. (2003) "Adaptive Learning and Curb Set Selection ", Cahiers de la MSE, 2003-22.

[III] Tercieux, O. (2003) "Uniqueness and Higher Order Beliefs: The Role of Stability Set ", Cahiers de la MSE, 2003-11.

⁶En particulier, le concept proposé dans la thèse caractérise complètement les dynamiques d'anticipations de Matsui et Matsuyama (1995).

[IV] Tercieux, O. (2003) “On the Robustness of Equilibria to Incomplete Information ”, Cahiers de la MSE, 2003-10.

References

- [1] Bernheim, D. (1984) “Rationalizable Strategic Behavior”, *Econometrica*, (July) 52, pp.1007-1028
- [2] Carlsson, H. et van Damme, E. (1993) “Global Games and Equilibrium Selection”, *Econometrica*, 61, pp.989-1018
- [3] Harsanyi, J.C. (1967-68) “Games with Incomplete Information Played by Bayesian Games Players”, Part I, II, III. *Management Science*, 14, (3,5,7)
- [4] Harsanyi, J. and Selten, R. (1988) “A General Theory of Equilibrium in Games”, Cambridge: MIT Press
- [5] McKelvey R.D. et Palfrey T.R. (1995) “Quantal Response Equilibria for Normal Form Games”, *Games and Economic Behavior*, 10, pp.6-38
- [6] Matsui, A. et Matsuyama, K. (1995) “An Approach to Equilibrium Selection”, *Journal of Economic Theory*, 65, pp.415-434
- [7] Mertens, J.F. et Zamir, S. (1985) “Formalization of Bayesian Analysis for Games with Incomplete Information”, *International Journal of Game Theory*, 14, pp.1-29
- [8] Morris, S. et Shin, H.S. (2001) “Rethinking Multiple Equilibria in Macroeconomics”, NBER Macroeconomics Annual 2000, pp. 139-161, MIT Press
- [9] Morris, S. et Shin H.S. (2003) “Global Games: Theory and Applications” dans *Advances in Economics and Econometrics*. (M. Dewatripont, L. Hansen et S. Turnovsky, Eds).. Cambridge, England: Cambridge University Press.
- [10] Nash, J. (1950) “Equilibrium points in n -person games”, *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 36, pp.48-49
- [11] Pearce, D. (1984) “Rationalizable Strategic Behavior and the Problem of Perfection”, *Econometrica*, (July) 52, pp.1029-1050
- [12] Shapley, L.S. (1964) “Some Topics in Two-Person games”, *Annals of Mathematical Studies*, 5, pp.1-28
- [13] Walliser, B. (2000) “L’économie cognitive”, Odile Jacob
- [14] Weibull, J. (1995) *Evolutionary Game Theory*, MIT Press (Cambridge, MA)