Sujet 1

Le sujet porte sur des données économiques dont le fichier statistique est en annexe, ainsi que certains résultats (tableaux et graphiques) obtenus par des traitements statistiques sous SPSS. Les variables C (chiffre d'affaires annuel), B (bénéfice annuel) et G (salaire annuel du PDG) sont exprimées en millions d'euros (source : Capital, octobre 2003).

La variable CAC40 indique l'appartenance ou non, à l'ensemble des 40 entreprises sélectionnées pour calculer l'indice CAC40.
Utiliser les annexes pour répondre aux questions suivantes.

PARTIE I :

1) Quelle est la population étudiée ?
   Préciser la nature de chaque variable statistique. Y-a-t-il des données manquantes ?
   Comment s'appelle le graphique 1 ?
2) On considère la variable C. Donner la formule de la variance en fonction du moment non centré d'ordre 2 et de la moyenne.
   Déduire du tableau1 la variance de la variable C.
   En déduire le moment non centré d'ordre 2 de C.

Pour les 4 questions suivantes, on considère les données de la variable C regroupées en 2 classes : [0.48 ; 10.495[et [10.495 ; 102.54].

3) Quel est l'effectif de chaque classe. Calculer les centres de classe, les amplitudes des classes , les densité de fréquence et les fréquences cumulées.
   Exprimer la fonction de répartition empirique de C.
4) Tracer la fonction de répartition empirique de C.
5) Calculer la proportion d'entreprises ayant un chiffre d'affaires inférieur à 30 millions d'euros.
6) Tracer l'histogramme. Que peut-on conclure sur la symétrie et la dispersion de la série statistique des chiffres d'affaires.

PARTIE II

On considère le modèle de régression linéaire du bénéfice en fonction du Chiffre d'affaires:

$$B_i = \alpha C_i + \beta + e_i \text{, pour } i = 1 \text{ à } 68.$$

7) Calculer les coefficients de variation des variables B et C.
   Que peut-on déduire sur la dispersion des valeurs de C , puis de B ?
8) Ecrire les formules des estimations des coefficients de régression linéaire. Démontrer ces formules.
9) A l'aide du graphique 2, donner leurs valeurs. En déduire le coefficient de corrélation linéaire des variables B et C
10) Le modèle de régression linéaire est-il acceptable ? Pourquoi ? Donner le principe d'un test d'hypothèse au niveau 5%.
11) Pour quelle entreprise, y a-t-il un résidu à la fois négatif et anormalement élevé ?
    Calculer sa valeur .
12) Quelle est la valeur de la somme des résidus ? Faire la démonstration.

ANNEXES Sujets 1

	societe	C	B	G	cac40
1	accor	7,14	,43	1,61	oui
2	agf	15,40	,27	,99	oui
3	airfrance	12,69	,12	.	non
4	airliquide	7,90	,70	1,30	oui
5	areva	8,27	,24	.	non
6	aventis	20,62	2,09	2,01	oui
7	axa	74,73	,95	1,96	oui
8	azurgmf	3,71	-,09	.	non
9	bnp	16,79	3,29	1,81	oui
10	bouygues	22,25	,67	1,93	oui
11	bp	15,75	,53	.	non
12	bricorama	,55	,02	.	non
13	caissepargne	,66	,95	.	non
14	carrefour	68,73	1,37	2,65	oui
15	casino	22,86	,45	.	oui
16	castorama	10,80	,47	.	non
17	cegetel	7,07	,11	2,40	non
18	colas	7,61	,21	.	non
19	creditlyonnais	6,77	,85	9,70	non
20	creditmutuel	4,71	,76	.	non
21	dellcomputer	,95	,00	.	non
22	dexia	5,17	1,30	1,12	oui
23	edf	48,36	,48	1,60	non
24	eiffage	6,85	,13	.	non
25	gdf	14,55	3,61	.	non
26	genralif	8,31	-,48	.	non
27	glonsanders	1,23	,01	.	non
28	gosport	,63	,01	.	non
29	grandvision	,60	,22	.	non
30	groupama	11,89	-,15	.	non
31	guyenne	1,21	,04	.	non
32	havas	13,26	,02	1,50	non
33	hyparlo	1,01	,02	.	non
34	lafarge	14,61	,46	1,76	oui

	societe	C	B	G	cac40
35	lafrancaise	7,44	,11	.	non
36	lagardere	13,22	-,29	.	oui
37	laposte	17,33	,03	.	non
38	l'oreal	14,29	1,28	6,26	oui
39	lvmh	12,69	,56	1,42	oui
40	macif	3,64	,08	.	non
41	metro	3,50	,05	.	non
42	michelin	15,64	,58	1,80	oui
43	mma	4,13	,04	.	non
44	pinault	14,73	,16	1,74	oui
45	pomona	1,97	,03	.	non
46	predica	9,30	,30	.	non
47	psa	54,44	1,69	1,91	oui
48	publicis	22,87	,15	1,79	non
49	rallye	23,68	,06	.	non
50	relaish	,60	,02	1,20	non
51	renault	22,42	1,95	1,65	oui
52	rossignol	,48	,01	.	non
53	sanofi	7,45	1,76	1,90	oui
54	schell	6,97	,01	.	non
55	schneider	9,06	,42	,88	oui
56	sncf	22,18	,06	.	non
57	soc-generale	14,45	1,40	1,80	oui
58	st-gobain	20,83	1,04	1,64	oui
59	sucres	1,72	,03	.	non
60	suez	46,09	-,86	2,27	non
61	thales	11,11	,11	,93	oui
62	thomson	10,19	,37	1,23	oui
63	total	102,54	6,26	2,41	oui
64	valeo	9,80	,14	.	non
65	veolia	17,08	,34	1,32	oui
66	vinci	17,55	,45	3,04	oui
67	vinciconstruc	7,07	,11	.	non
68	vivendi	58,15	-23,30	1,00	oui

S2

Annexes Sujet 1

TABLEAU 1

Statistiques

		C	B	G
N	Valide	68	68	33
	Manquante	0	0	35
Moyenne		15,7096	,2236	2,0767
Médiane		10,4950	,2150	1,7600
Ecart-type		18,91607	3,07404	1,65820
Asymétrie		2,619	-6,726	3,703
Erreur std. d'asymétrie		,291	,291	,409
Minimum		,48	-23,30	,88
Maximum		102,54	6,26	9,70

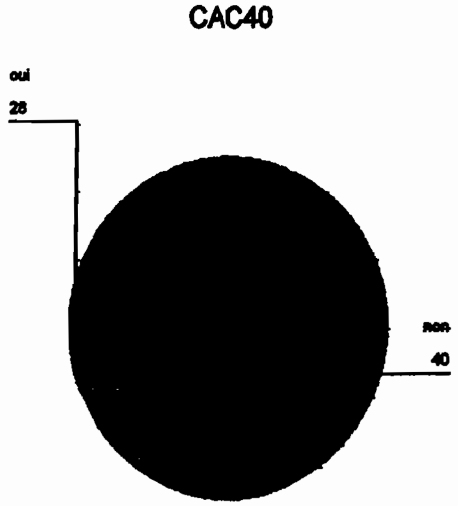
TABLEAU 2

variable C: chiffre d'affaires annuel en million d'euros

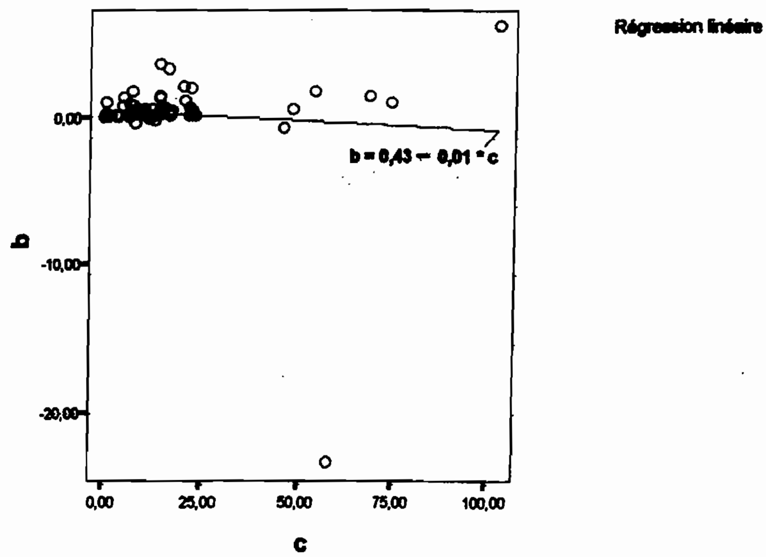
C

CAC40	Moyenne	N	Ecart-type	Médiane	Minimum	Maximum	Q_1	Q_3
1	24,7157	28	23,95265	15,5200	5,17	102,54	11.5	22.4
2	9,4053	40	10,88661	7,0200	,48	48,36	1.4	12.5
Total	15,7096	68	18,91607	10,4950	,48	102,54	–	–

GRAPHIQUE 1



GRAPHIQUE 2



S3

Sujet 3

L'exercice 3 utilise les résultats énoncés dans les exercices 1 et 2.
Les trois exercices peuvent être traités de façon indépendante.
Dans toute la suite, b désigne un paramètre réel strictement positif.

Exercice 1

Pour tout $n \geq 1$, on note $u_n = \dfrac{1}{n(n+1)}$ et $v_n = \dfrac{1-e^{-bn}}{n(n+1)}$.

1. Montrer que les séries de terme général u_n et v_n sont convergentes.

2. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

3. En admettant que pour tout réel $x \in]-1,1[$, $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, montrer que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = \left(1-e^b\right)\ln\left(1-e^{-b}\right)$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $\forall\, x > 0,\ f(x) = \left(1-e^x\right)\ln\left(1-e^{-x}\right)$.

1. Calculer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2. Dresser le tableau de variations de la fonction f.

Exercice 3 : un modèle d'imposition par tranches

Dans la plupart des pays, l'Etat prélève une partie des revenus déclarés des habitants par un impôt direct. On suppose que ce prélèvement se fait par tranches de la façon suivante : une unité u des revenus étant choisie, on suppose que la partie des revenus d'un individu se trouvant dans la tranche $[n, n+1[$ $(n \geq 0)$ est imposée au taux $\tau_n(b) = \dfrac{1}{2}\left(1-e^{-bn}\right)$.

1. Notons $i(r)$ l'impôt que devra payer un individu disposant d'un revenu annuel égal à r. Que vaut $i(r)$ dans chacun des cas suivants : $r \in [0,1[$, $r \in [1,2[$, $r \in [2,3[$, $r \in [n, n+1[$

Notons N le nombre total de contribuables et $N(r)$ le nombre d'individus ayant un revenu annuel supérieur ou égal à r. On suppose que $N(r) = \begin{cases} N & si\ r \leq 1 \\ \dfrac{N}{r^2} & si\ r > 1 \end{cases}$.

La tranche $[n, n+1[$ rapporte à l'Etat la somme $I_n(b) = \tau_n(b) \displaystyle\int_n^{n+1} N(r)\,dr$.

2. Calculer $I_n(b)$.

3. Montrer que l'impôt encaissé par l'Etat vaut $I(b) = \dfrac{N}{2}\left(1-e^b\right)\ln\left(1-e^{-b}\right)$.

4. Si l'on admet que le montant total des revenus de la population est $M = 2N$, l'Etat peut-il prélever par l'impôt direct le dixième de ce montant total ? Peut-il en prélever le tiers ?

Question 2

On suppose que le marché est en situation de concurrence pure et parfaite, ce qui conduit à ce que le prix unitaire p du bien soit fixé de façon exogène. Le profit de l'entreprise est alors, si elle choisit de produire une quantité Q, de $p \times Q - C(Q)$

Exprimé en fonction de p la quantité Q que va choisir de produire l'entreprise.

Question 3

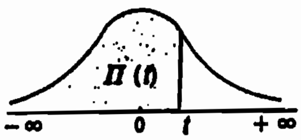
On suppose maintenant que l'entreprise est en situation de monopole et qu'elle peut donc fixer son prix. La demande des consommateurs varie avec le prix de la façon suivante D(p) = a - p (où a est une constante) lorsque p est inférieur à a ; la demande est nulle au-delà.

Déterminer le prix que va fixer l'entreprise et la quantité qu'elle va produire.

Même question si la fonction de demande des consommateurs est D(p) = Max(a - p^2; 0).

TABLE DE LA FONCTION DE RÉPARTITION $\Pi(t)$
DE LA LOI DE LAPLACE-GAUSS $N(0\,;\,1)$
(Probabilité de trouver une valeur inférieure à t.)

$$\Pi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-x^2/2}\, dt$$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,50000	0,50399	0,50798	0,51197	0,51595	0,51994	0,52392	0,52790	0,53188	0,53586
0,1	0,53983	0,54380	0,54776	0,55172	0,55567	0,55962	0,56356	0,56750	0,57142	0,57535
0,2	0,57926	0,58317	0,58706	0,59095	0,59484	0,59871	0,60257	0,60642	0,61026	0,61409
0,3	0,61791	0,62172	0,62552	0,62930	0,63307	0,63683	0,64058	0,64431	0,64803	0,65173
0,4	0,65542	0,65910	0,66276	0,66640	0,67003	0,67365	0,67724	0,68082	0,64439	0,68793
0,5	0,69146	0,69497	0,69847	0,70194	0,70540	0,70884	0,71226	0,71566	0,71904	0,72240
0,6	0,72575	0,72907	0,73237	0,73565	0,73891	0,74215	0,74537	0,74857	0,75175	0,75490
0,7	0,75804	0,76115	0,76424	0,76731	0,77035	0,77337	0,77637	0,77935	0,78230	0,78524
0,8	0,78814	0,79103	0,79389	0,79673	0,79955	0,80234	0,80511	0,80785	0,81057	0,81327
0,9	0,81594	0,81859	0,82121	0,82381	0,82639	0,82894	0,83147	0,83398	0,83646	0,83891
0,1	0,84134	0,84375	0,84614	0,84850	0,85083	0,85314	0,85543	0,85769	0,85993	0,86214
1,1	0,86433	0,86650	0,86864	0,87076	0,87286	0,87493	0,87698	0,87900	0,88100	0,88298
1,2	0,88493	0,88686	0,88877	0,89065	0,89251	0,89435	0,89617	0,89796	0,89973	0,90147
1,3	0,90320	0,90490	0,90658	0,90824	0,90988	0,91149	0,91309	0,91466	0,91621	0,91774
1,4	0,91924	0,92073	0,92220	0,92364	0,92507	0,92647	0,92786	0,92922	0,93056	0,93189
1,5	0,93319	0,93448	0,93574	0,93699	0,93822	0,93943	0,94062	0,94179	0,94295	0,94408
1,6	0,94520	0,94630	0,94738	0,94845	0,94950	0,95053	0,95154	0,95254	0,95352	0,95449
1,7	0,95543	0,95637	0,95728	0,95819	0,95907	0,95994	0,96080	0,96164	0,96248	0,96327
1,8	0,96407	0,96485	0,96562	0,96638	0,96712	0,96784	0,96856	0,96926	0;96995	0,97062
1,9	0,97128	0,97193	0,97257	0,97320	0,97381	0,79441	0,97500	0,97558	0,97615	0,97670
2,0	0,97725	0,97773	0,97831	0,97882	0,97932	0,97982	0,98030	0,98077	0,98124	0,98169
2,1	0,98214	0,98257	0,98300	0,98341	0,98382	0,98422	0,98461	0,98500	0,98537	0,98574
2,2	0,98610	0,98645	0,98679	0,98713	0,98754	0,98778	0,98809	0,98840	0,98870	0,98899
2,3	0,98928	0,98956	0,98983	0,99010	0,99036	0,99061	0,99086	0,99111	0,99134	0,99158
2,4	0,99180	0,99202	0,99224	0,99245	0,99266	0,99286	0,99305	0,99324	0,99343	0,99361
2,5	0,99379	0,99396	0,99413	0,99430	0,99446	0,99461	0,99477	0,99492	0,99506	0;99520
2,6	0,99534	0,99547	0,99560	0,99573	0,99585	0,99598	0,99609	0,99621	0,99632	0,99643
2,7	0,99653	0,99664	0,99674	0,99683	0,99693	0,99702	0,99711	0,99720	0,99728	0,99736
2,8	0,99744	0,99752	0,99760	0,99767	0,99774	0,99781	0,99788	0,99795	0,99801	0,99807
2,9	0,99813	0,99819	0,99825	0,99831	0,99836	0,99841	0,99846	0,99851	0,99856	0,99861

S6

Indiquer quelle difficulté apparaît lorsque l'on compare ces résultats aux observations. Quelles modifications suggériez-vous ?

Question 2

On utilise désormais une approximation par une loi normale du temps total pour chacun des 3 modes de transport utilisé. En utilisant les résultats de moyenne et d'écart-type donnés dans les 2 dernières colonnes du tableau, indiquez les paramètres des 3 lois normales modélisant les temps de transport respectivement à pied, par bus et par métro.

Calculer à l'aide de la table jointe page suivante, la probabilité que le transport par bus prenne (temps d'attente et temps de marche inclus) au total plus de 35 minutes. Faire de même pour le transport par métro.

Question 3

Supposez que vous adoptiez les règles de comportement suivantes :

- Si vous vous êtes rendu au travail à pied hier, alors vous ferez de même aujourd'hui à moins qu'il pleuve (ce qui se réalise avec une probabilité de 20%) auquel cas vous prendrez soit le bus soit le métro (même probabilité de prendre zlors l'un ou l'autre).
- Si vous vous avez utilisé le bus hier alors vous ferez de même aujourd'hui sauf si la durée totale de transport hier a dépassé 35 minutes. Dans ce cas, vous irez aujourd'hui à pied s'il ne pleut pas et par métro s'il pleut.
- Si vous vous avez utilisé le métro hier alors vous ferez de même aujourd'hui sauf si la durée totale de transport hier a dépassé 35 minutes. Dans ce cas, vous irez aujourd'hui à pied s'il ne pleut pas et par bus s'il pleut.

Calculer pour chacun des 3 modes de transport, la probabilité que vous utiliserez aujourd'hui ce mode de transport sachant que vous avez utiliser hier tel mode de transport. Ceci vous conduira à calculer 9 probabilités conditionnelles. Rangez ces probabilités dans une matrice P avec en ligne le mode de transport utilisé hier (ligne 1 : à pied, ligne2 : par bus, ligne 3 : par métro) et en colonne le mode de transport ulisisé aujourd'hui (colonne 1 : à pied, colonne 2 : par bus, colonne 3 : par métro). Montrer que 1 est une valeur propre de la matrice obtenue.

Trouvez un vecteur ligne (a,b,c) tel que $(a,b,c) \times P = (a,b,c)$.

Exercice 2

On considère une entreprise produisant un bien noté X. Le coût total C de production d'une quantité Q de ce bien X est supposé donné par la formule suivante :

$$C(Q) = 1 + Q - Q^2 + Q^3$$

Question 1

Interpréter les différents termes qui interviennent dans l'expression (en particulier leur signe).
Tracer, après avoir mené une étude de fonction détaillée, la courbe représentative du coût unitaire moyen $\frac{C(Q)}{Q}$. Tracer de même (sur le même graphique) la courbe représentative du coût marginal C'(Q) (fonction dérivé de C(Q))

Agrégation SES
Sujet N°2

Exercice 1

Chaque jour, pour vous rendre sur votre lieu de travail, vous pouvez utiliser au choix 3 modes de transport : vous y rendre à pied, utiliser le bus ou utiliser le métro. Pour comparer ces différents moyens de transports, vous décidez dans un premier temps, d'utiliser chacun d'eux 10 jours consécutifs et vous notez les temps de transport correspondants. Les résultats (exprimés en minutes) sont les suivants :

Moyens de transport											Moyenne	Ecart-type
A pied												
temps de marche	40	42	41	39	44	39	40	41	41	43	**41**	**1,63**
Par bus												
temps d'attente	17	2	13	2	5	8	10	1	4	8	**7**	**5,23**
temps de trajet	15	25	13	10	17	13	24	20	15	18	**17**	**4,85**
temps de marche	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	**3**	**0**
Par métro												
temps d'attente	4	6	8	4	3	5	2	6	16	6	**6**	**3,92**
temps de trajet	8	12	9	11	8	10	13	10	19	10	**11**	**3,23**
temps de marche	10	12	10	9	10	10	11	9	9	10	**10**	**0,94**

Vous décidez de modéliser les différentes durées intervenant dans ce tableau de la façon suivante (dans ce qui suit i est un indice de ligne et i varie de 1 (temps de marche pour le mode de transport « à pied ») à 7 (temps de marche pour le mode de déplacement par métro) *(par exemple , i = 3 correspond au temps de trajet par bus)* et j est un indice de colonne variant de 1 à 10) :

$Y_{ij} = m_i + X_{ij}$

où m_i est une constante qui s'interprète comme un temps minimum associé au temps que caractérise la ligne i et où X_{ij} sont des variables aléatoires correspondant au temps additionnel par rapport à ce temps minimum observé pour le temps associé à la ligne i et la colonne j. On suppose que les variables aléatoires sont indépendantes. On suppose que pour i fixé les v.a. X_{ij} (j variant de 1 à 10) ont même loi et suivent chacune une loi exponentielle de paramètre λ_i, dont on rappelle la densité :

pour x > 0, $f(x) = \lambda_i \times \exp(-\lambda_i \times x)$

pour x < 0, $f(x) = 0$

Question 1

Tracer le graphe de cette fonction densité. Calculer explicitement l'espérance et la variance d'une loi exponentielle de paramètre λ_i.

En supposant que le modèle proposé est correct, calculer l'espérance et la variance des variables aléatoires Y_{ij}. Etant donné les observations de moyenne et d'écart type donnés, pour chaque ligne, dans les deux dernières colonnes du tableau, déduire une estimation des paramètres m_i et λ_i.

Sujet 4

On considère les annexes ci-joint présentant le tableau de données statistiques , ainsi que les résultats de traitements statistiques obtenus par le logiciel SAS.

Préciser la population et les variables étudiées de cette étude. Utiliser les résultats des différents tableaux pour répondre aux questions suivantes :

1-(tableau 1)

- Commenter les statistiques .
- Que conclure sur la dispersion de ces variables ?

2- (tableau 2)

- Commenter les coefficients de corrélation linéaire.

3- (tableau 3)

- Expliquer le principe de diagonalisation de la matrice de corrélation.
- Quelle valeur retrouve-t-on en sommant les valeurs propres ? Que représente-t-elle ?
- Commenter la valeur propre en terme d'inertie du nuage de points et le rapport d'inertie cumulée .

4 -

- Expliquer la méthode d'Analyse en Composantes Principales en précisant les objectifs sur les individus et sur les variables.
- Préciser le pourcentage d'inertie expliqué par le premier plan principal.

5 -(tableau 4)

- Commenter les résultats du tableau 4, sur le modèle de régression dont on précisera la variable à expliquer et la variable explicative.
- Quels sont les coefficients de régression significativement différents de 0, au niveau d'erreur 1%, puis 15% ?
- Que conclure sur la validité de ce modèle ?

ANNEXES Sujet 4

Présentation du tableau de données :

Description du tableau :

Nous avons collecté nos données dans le numéro spécial 1627 du vendredi 21 novembre 2003 de l'hebdomadaire « Le point » qui a pour titre « le guide du numérique 2003-2004 ». Il s'agit d'une étude sur tous les produits numériques du marché (appareils photo, informatiques, portables…). Notre tableau contient plusieurs informations relatives aux caractéristiques d'une sélection de 40 téléphones portables. Nous avons choisi 4 variables quantitatives et 3 variables qualitatives.

- En ce qui concerne la population, elle est représentative du marché du portable. Cependant, nous en avons exclu ceux possédant un appareil photo numérique. Sinon, nous avons choisi 40 portables au hasard sur une étude portant sur 64 modèles.

- Variable quantitative « prix » : il s'agit du prix de vente des portables décidé par les fabricants.

- Variable quantitative « poids » : c'est le poids du portable en gramme.

- Variable quantitative « nbnom » : elle consiste en la capacité du répertoire du portable, c'est à dire qu'elle représente le nombre de noms que le répertoire peut stocker.

- Variable quantitative « autonomie » : elle est notée en minutes. Elle a été déterminée en passant des communications en se déplaçant, jusqu'à ce que le téléphone, au départ chargé à bloc, finisse par s'éteindre. Le trajet emprunté était toujours le même. Il était caractérisé par un signal parfois en dents de scie.

- Variable qualitative « couleur » : il y a deux modalités :
  - N : l'écran est en noir et blanc ou bien rétro éclairage.
  - O : l'écran est en couleur

- Variable qualitative « reception » : elle a été testée avec un signal faible. 10 appels ont été passés avec chaque téléphone en limite de couverture de réseau. Cette variable est déterminée par quatre modalités :
  - 1 : très mauvaise qualité de réception
  - 2 : mauvaise qualité de réception
  - 3 : bonne qualité de réception
  - 4 : très bonne qualité de réception.

- Variable qualitative « fonction » : il s'agit de la richesse des fonctionnalités (fonction GPRS, modem, port infrarouge…) Elle comprend 8 modalités (de 1 à 8) qui vont d'une fonctionnalité très pauvre (noté 1) à une fonctionnalité très riche (noté 8).

TABLEAU 1

Variables	N	Médiane	Mode	Moyenne	Ecart type	Minimum	Maximum
Prix	40	220	220	235.575	80.2403081	124	480
poids	40	87	83	89.625	13.2058408	65	124
nbnom	40	300	500	416.750	368.8314013	50	2000
autonomie	40	280	240	324.250	130.4309917	180	765

TABLEAU 2

ANNEXES sujet 4

La matrice de corrélation met en évidence les liaisons entre les différentes variables quantitatives.

	prix	poids	nbnom	autonomie
prix	1.0000	0.1778	0.1253	0.5905
poids	0.1778	1.0000	-.0466	0.3299
nbnom	0.1253	-.0466	1.0000	0.0047
autonomie	0.5905	0.3299	0.0047	1.0000

TABLEAU 3

Valeur propre de la matrice de corrélation :

	Valeur propre	Différence	Proportion	Cumulative
1	1.76639739	0.71581728	0.4416	0.4416
2	1.05058011	0.24650936	0.2626	0.7042
3	0.80407074	0.42511898	0.2010	0.9053
4	0.37895176		0.0947	1.0000

TABLEAU 4

Notre modèle s'écrit : **Prix= a1 + a2 poids + a3 nbnom + a4 autonomie + e**

Variable	DF	Paramètre Estimé	Ecart Type	T si H° Coeff=0	SigT
Constante	1	112.85203	74.80756	1.51	0.1401
poids	1	-0.07620	0.85676	-0.09	0.9296
nbnom	1	0.02653	0.02896	0.92	0.3656
autonomie	1	0.36544	0.08665	4.22	0.0002

Agrégation SES
Sujet N° 5

Exercice 1

Soient 2 entreprises E1 et E2 produisant chacune un bien. On note X1 le bien produit par E1 et x_1 le prix que fixera E1 pour ce produit. De même, on note X2 le bien produit par E2 et x_2 le prix que fixera E2 pour son produit.

Question 1

x_1 et x_2 étant supposés fixés, la demande des consommateurs pour chacun des 2 biens sera de

- $D_1(x_1, x_2) = 1 - x_1 - x_2$ pour le bien X1 et
- $D_2(x_2) = 2 - (x_2)^2 - x_2$ pour le bien X2

Trouver des exemples illustratifs permettant d'expliquer pourquoi la demande pour le bien X1 dépend du prix du bien X2. Interpréter le signe devant x_2 dans l'expression de D_1. Un signe opposé serait-il possible ? Pourquoi ?

Chaque entreprise va déterminer le prix du bien qu'elle produit de façon à maximiser son profit que l'on suppose être le produit du prix par la demande *(dans cet exercice, les coûts de production sont négligés).*
En supposant x_2 fixé, déterminer le prix x_1 que va choisir E1 pour maximiser $x_1 \times D_1(x_1,x_2)$.
De même, déterminer le prix x_2 que va choisir E2 pour maximiser $x_2 \times D_2(x_2)$.
En déduire, les prix qui s'observeront effectivement sur les marchés des deux biens.

Question 2

On suppose que les deux entreprises fusionnent et donc que le profit du groupe ainsi constitué sera la somme des profits de E1 et de E2.
Calculer dans ce nouveau cadre, les prix que le groupe fixera pour chacun des biens X1 et X2 de façon à maximiser le profit total du groupe. Expliquer de façon détaillée les différences avec les résultats de la question précédente.
Dans cette approche, une fusion d'entreprise est-elle bénéfique (i) pour les entreprises (ensemble et séparément) (ii) pour les consommateurs. Est-ce un résultat général ? Pourquoi ?

Exercice 2

Un modèle de taux d'intérêt postule que le taux de base I_t observé au trimestre t vérifie la relation suivante :

$$I_t = 4\% + \frac{3}{4} \times (I_{t-1} - 4\%) + e_t$$

où e_t sont des variables aléatoires indépendantes et de même loi qui peuvent prendre les valeurs -0,25% ; 0% et +0,25% avec les probabilités respectives $\frac{1-p}{2}$; p et $\frac{1-p}{2}$

Question 1

Expliquer cette modélisation et commenter les hypothèses du modèle.

Question 2

Quelle est l'espérance de e_t ? Que se passerait-il si e_t avait une espérance différente ?

Question 3

Exprimer I_t en fonction de I_0 et des variables aléatoires e_1, e_2,.... e_t.
Calculer, en fonction de I_0, de p et de t, l'espérance de I_t, ainsi que sa variance.

Question 4

Supposez que vous avez observé I_0, I_1....I_t. Comment proposeriez-vous d'estimer p ?
Détailler votre proposition.

L'exercice 3 utilise les résultats énoncés dans l'exercice 2.

Exercice 1

On fait choix d'une unité u de revenu (par exemple u = 150 euros) et on appelle X la variable aléatoire représentant dans cette unité le revenu annuel d'un individu pris au hasard dans une certaine population.

On suppose que X suit la loi de Pareto de paramètres $\alpha > 1$ et $r_0 > 0$, c'est-à-dire qu'une densité f de X est :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{r_0}\left(\dfrac{r_0}{x}\right)^{\alpha+1} & si\ x \geq r_0 \\ 0 & si\ x < r_0 \end{cases}$$

r_0 est le revenu minimal recensé dans la population.

1. Calculer la fonction de répartition F de X et donner l'allure de son graphe.

2. Calculer le revenu moyen d'un individu de la population.

Soit N l'effectif total de la population et, pour tout $r > 0$, $N(r)$ le nombre d'individus ayant un revenu au moins égal à r.

3. Quel est le montant total des revenus de la population ?

4. En exprimant de deux façons différentes la probabilité qu'un individu, pris au hasard dans la population, ait un revenu au moins égal à r, montrer que $N(r) = (1 - F(r))N$. En déduire l'expression de $N(r)$ en fonction de N, α et r_0.

5. On change d'unité de revenu, on remplace u par une autre unité $u' = \lambda u$, où $\lambda > 0$. et on appelle X' la variable aléatoire représentant le revenu annuel d'un individu exprimé dans l'unité u'. Calculer X' en fonction de X et montrer que la loi de X' est aussi une loi de Pareto. Préciser ses paramètres.

Exercice 2

Soit M la matrice carrée d'ordre 3 définie par $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.

2. Montrer que M admet trois valeurs propres 1, 2 et 4.

3. Déterminer une matrice P inversible telle que $P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Exercice 3

Une administration, dont on suppose l'effectif constant, répartit ses employés d'une année sur l'autre au hasard entre trois secteurs A, B et C, en respectant les proportions suivantes.

75 % des employés du secteur A y restent l'année suivante tandis que 25 % vont travailler dans le secteur C.

75 % des employés du secteur B y restent l'année suivante tandis que 25 % vont travailler dans le secteur A.

25 % des employés du secteur C y restent l'année suivante tandis que 25 % vont travailler dans le secteur A et 50 % vont travailler dans le secteur B.

On désigne par a, b et c les effectifs respectifs dans les secteurs A, B et C au cours de la première année de fonctionnement. Au cours de la deuxième année, les effectifs dans les secteurs A, B et C sont respectivement de 35, 30, 15 employés.

1. Déterminer a, b et c.

La première année, un employé E travaille dans le secteur A. Pour tout $n > 0$, on désigne par :

A_n l'événement : « E travaille dans le secteur A la $n^{ième}$ année »,

B_n l'événement : « E travaille dans le secteur B la $n^{ième}$ année »,

C_n l'événement : « E travaille dans le secteur C la $n^{ième}$ année »,

On note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives des événements A_n, B_n et C_n.

On pose, pour tout $n \geq 1$, $X_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.

2. Montrer que $X_n = AX_{n-1}$, où A est une matrice carrée d'ordre 3 que l'on exprimera en fonction de M.

3. Exprimer a_n, b_n et c_n en fonction de n.

4. Déterminer les limites quand n tend vers $+\infty$ des probabilités a_n, b_n et c_n.

Sujet 7

L'exercice 3 utilise les résultats énoncés dans les exercices 1 et 2.
Les trois exercices peuvent être traités de façon indépendante.

Exercice 1

b désigne un paramètre réel strictement positif. Soient f et τ_b deux fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par :

$$f(x)=e^{-x} \qquad \text{et} \qquad \tau_b(x)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-bx}\right)$$

1. Dresser le tableau de variation de chaque fonction et tracer leurs courbes représentatives

2. Donner, en utilisant la courbe représentative de f, une interprétation géométrique du quotient $\dfrac{e^{-x}-1}{x}$.

En déduire que l'application $x \mapsto \dfrac{e^{-x}-1}{x}$ est une fonction croissante.

Exercice 2

1. Montrer que, pour tout $b>0$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-br}}{r^2}dr$ est convergente.

2. Pour tout $b>0$, on note $\varphi(b)=\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-br}}{r^2}dr$. Montrer que φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

3. Montrer que $\displaystyle\lim_{b\to+\infty}\varphi(b)=0$ et $\displaystyle\lim_{b\to 0}\varphi(b)=1$.

Exercice 3 : un modèle d'imposition continu

Dans la plupart des pays, l'Etat prélève une partie des revenus déclarés des habitants par un impôt direct. N désigne le nombre total de contribuables et u désigne l'unité des revenus qui a été choisie. Notons $N(r)$ le nombre d'individus ayant un revenu annuel supérieur ou égal à r.

On suppose que $N(r)=\begin{cases} N & si\ r\le 1 \\ \dfrac{N}{r^2} & si\ r>1 \end{cases}$.

Le taux d'imposition est donné par la fonction $r\mapsto \tau_b(r)=\dfrac{1}{2}\left(1-e^{-br}\right)$.

On admet que le montant total de l'impôt encaissé par l'Etat est $J(b)=\displaystyle\int_0^{+\infty}N(r)\tau_b(r)dr$.

1. Montrer que $J(b)=\dfrac{N}{2}\left(2+\dfrac{e^{-b}-1}{b}-\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{e^{-br}}{r^2}dr\right)$.

2. Dresser le tableau de variations de J.

3. Si l'on admet que le montant total des revenus de la population est $M=2N$, l'Etat peut-il prélever par l'impôt direct 60 % de ce montant total ? Peut-il en prélever 40 % ?

Sujet 8

On considère les annexes ci-joint présentant le tableau de données statistiques, ainsi que les résultats de traitements statistiques obtenus par le logiciel SAS.

Préciser la population et les variables étudiées de cette étude. Utiliser les résultats des différents tableaux pour répondre aux questions suivantes :

1- (tableau 1)

- Commenter les coefficients de corrélation linéaire.
- Que conclure sur la liaison linéaire entre variables ?

2- (tableau 2)

- Expliquer le principe de diagonalisation de la matrice de corrélation.
- Quelle valeur retrouve-t-on en sommant les valeurs propres ?
- Commenter la valeur propre en terme d'inertie du nuage de points et le rapport d'inertie cumulée .

3 – (tableau 3)

- Expliquer la méthode d'Analyse en Composantes Principales en précisant les objectifs sur les individus et sur les variables.
- Expliquer les valeurs numériques de ce tableau.
- Interpréter les 3 composantes principales.

4 -(graphique 4)

- Commenter les résultats du graphique 4, sur le modèle de régression dont on précisera la variable à expliquer et la variable explicative.
- Expliquer la méthode de régression linéaire . Comment détermine-t-on les estimations des coefficients de régression? Faire la démonstration.
- Que conclure sur la validité de ce modèle ?

ANNEXES Sujet 8

Nous allons étudier les données statistiques d'une population de 55 individus correspondant à divers états à travers le monde.

Nous allons effectuer cette études au travers de 10 variables : 9 variables quantitatives et une qualitative. Toutes nos données sont issues du Quid 2004 (www. Quid.fr) et font référence à l'année 2003.

Budget Etat (Betat) : Le budget est l'acte par lequel sont prévues et autorisées les recettes et les dépenses annuelles de l'État (projet de loi de finances et lois de finances initiale). Mais c'est aussi l'ensemble des comptes qui décrivent pour une année civile toutes les ressources et toutes les charges de l'État .

Budget militaire (Bmilit) : Il est constitué en grande partie des crédits alloués par les Ministères de la défense. Il couvre les dépenses d'exploitation , de maintenance et les dépenses d'équipement liées à la structure militaire internationale. IL couvre aussi les dépenses de fonctionnement de la structure de commandement de l'OTAN pour les activités de maintien de la paix.

Deficit budgétaire (DefBud): c'est la situation dans laquelle les recettes de l'Etat sont inférieures à ses dépenses au cours d'une année. C'est donc un solde négatif . Il équivaut au besoin de financement de l'Etat et se traduit par le montant des emprunts nouveaux qu'il doit contracter au cours de l'année. Au cours de notre étude nous allons rencontrer des Etats en excédents budgétaires (solde positif).

Dépenses d'éducation (DepEduc) : Elles sont constituées en grande partie des crédits alloués par le Ministère de l'Education, salaires des enseignants,….

Budget Santé (Bsanté) : Il correspond entre autres, au financement des hôpitaux.

Population active (PA): La population active constitue l'offre de main-d'œuvre sur le marché du travail. Elle est définie comme la part de la population qui travaille ou qui est prête à travailler, indépendamment du fait qu'elle a trouvé ou non du travail.

Produit National Brut (PNB) : Il mesure la production des citoyens d'une nation sans égard pour le lieu de résidence dans le monde. Il est exprimé en milliards de dollars.

Population (POP): Cette variable représente la population totale de chaque pays exprimée en millions d'habitants.

PNB par habitant (PNBHBT): Le Produit National Brut (PNB) par habitant est la valeur en dollars des biens et services finals produits durant l'année par un pays, divisée par le nombre de ses habitants. Il représente le revenu moyen des habitants du pays et est exprimé en dollars par habitant.

Continent : Cette variable correspond au continent de l'état étudiée. La variable continent a six modalités codées :

- 1 = Afrique
- 2 = Amérique Latine
- 3 = Amérique du Nord
- 4 = Asie
- 5 = Europe
- 6 = Océanie et Polynésie

ANNEXES : Analyse en composantes principales

(Sujet 8)

I) Matrice des corrélations entre les variables initiales (TABLEAU 1)

	BEtat	DefBud	Dep Educ	BSante	BMilit	PA	pnbpop
BEtat	1.0000	-.2680	0.0593	0.4216	-.1210	0.2386	0.4324
DefBud	-.2680	1.0000	-.0123	0.3131	-.0615	0.1695	0.4004
DepEduc	0.0593	-.0123	1.0000	-.0732	-.0529	0.1071	0.1219
BSante	0.4216	0.3131	-.0732	1.0000	-.1467	0.4029	0.7933
BMilit	-.1210	-.0615	-.0529	-.1467	1.0000	-.0865	-.1772
PA	0.2386	0.1695	0.1071	0.4029	-.0865	1.0000	0.4876
pnbpop	0.4324	0.4004	0.1219	0.7933	-.1772	0.4876	1.0000

II) Valeurs propres et inertie (TABLEAU 2)

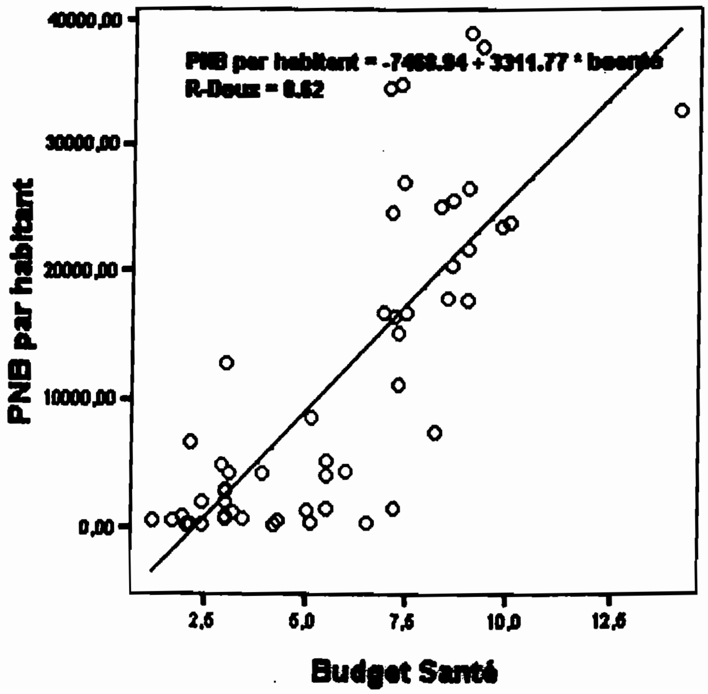
	Eigenvalue	Difference	Proportion	Cumulative
1	2.58379066	1.30775018	0.3691	0.3691
2	1.27604048	0.23744373	0.1823	0.5514
3	1.03859675	0.09235791	0.1484	0.6998
4	0.94623884	0.28016800	0.1352	0.8350
5	0.66607084	0.34360652	0.0952	0.9301
6	0.32246432	0.15566621	0.0461	0.9762
7	0.16679811		0.0238	1.0000

III) Matrice des corrélations entre les variables initiales et les composantes principales : (TABLEAU 3)

	Prin1	Prin2	Prin3
BEtat	0.54188 <.0001 47	-0.71809 <.0001 47	-0.17920 0.2281 47
DefBud	0.39486 0.0060 47	0.83989 <.0001 47	0.10698 0.4741 47
DepEduc	0.10157 0.4969 47	-0.19518 0.1886 47	0.91727 <.0001 47
BSante	0.87322 <.0001 47	0.04999 0.7386 47	-0.23988 0.1044 47
BMilit	-0.28018 0.0565 47	0.09522 0.5244 47	-0.28109 0.0556 47
PA	0.65313 <.0001 47	-0.00998 0.9469 47	0.13055 0.3818 47
pnbpop	0.92539 <.0001 47	0.07224 0.6294 47	0.00771 0.9590 47

IV) - Régression linéaire

(GRAPHIQUE 1)



Sujet 9

Agrégation SES
Sujet N°

Exercice 1

On suppose que l'on peut modéliser une variable économique à partir d'une loi uniforme sur un intervalle $[\theta;\theta+1]$ où θ est un paramètre inconnu strictement positif, que l'on va chercher à estimer. On dispose d'un échantillon $(X_1, X_2, \ldots X_n)$ extrait de réalisations de cette variable. On suppose les X_j indépendantes 2 à 2.

On pose : $S_n = \sup_{1\le j\le n}(X_j)$ et $I_n = \inf_{1\le j\le n}(X_j)$

Question 1

Calculer la loi de S_n et celle de I_n (on calculera en particulier leur fonction densité - on pourra, pour cela, calculer au préalable $P(S_n<a)$ et $P(I_n>b)$)

Calculer l'espérance et la variance de S_n et de I_n. On montrera en particulier que $E[S_n] = \theta + 1 - \frac{1}{n+1}$.

En déduire le comportement de S_n et de I_n lorsque n tend vers l'infini.

Question 2

Pour un nombre réel u compris entre 0 et 1, on pose $A_n(u) = u\times(S_n-1) + (1-u)\times I_n$.
Calculer l'espérance de $A_n(u)$. Quelle constante ne dépendant que de n et de u êtes-vous tenté d'ajouter à $A_n(u)$?
Vers quoi converge $A_n(u)$ lorsque n tend vers l'infini ?

Question 3

L'objectif de cette question est de calculer la variance de $A_n(u)$.
Calculer $P(b<I_n\,;\,S_n<a)$ où a et b sont deux constantes.
En notant $f_{I,S}(t,s)$ la fonction densité du couple (I_n,S_n), exprimer la probabilité précédente sous forme d'une intégrale faisant intervenir la fonction densité de (I_n,S_n).
En utilisant ces deux résultats, calculer par dérivation $f_{I,S}(t,s)$. En déduire l'espérance du produit $I_n \times S_n$.
Calculer alors la variance de $A_n(u)$ et la valeur de u qui minimise cette variance.

Question 4

Calculer l'espérance commune des X_j. Utiliser ce résultat pour proposer un estimateur de θ sans biais (c'est-à-dire dont l'espérance est θ) à partir de la moyenne des X_j.

Parmi tous les estimateurs étudiés, lequel proposez-vous de retenir ?

Exercice 2

Une version simplifiée du modèle de Samuelson est donnée par les équations suivantes :

- $I_t = k\,(Y_{t-1} - Y_{t-2})$
- $C_t = cY_t + S$

où c est une constante appelée propension marginale à consommer et k et S des constantes.
I_t, C_t et Y_t sont respectivement l'investissement, la consommation et la production totale à la date t.
On a donc $I_t + C_t = Y_t$.

Question 1
Mettez en évidence une relation de la forme $u\,Y_t + v\,Y_{t-1} + w\,Y_{t-2} = S$, avec u, v et w des constantes ne dépendant que de k et c.

Question 2
Proposez une méthode pour estimer les paramètres du modèle (on suppose avoir des données d'observations de Y, C et I pendant plusieurs années)

Questions 3
Les observations conduisent à retenir $S = 1$, $c = 0{,}75$ et $k = 5$.

Chercher les suites géométriques solutions de $u\,Y_t + v\,Y_{t-1} + w\,Y_{t-2} = 0$.
En déduire l'ensemble des solutions de $u\,Y_t + v\,Y_{t-1} + w\,Y_{t-2} = S$.
Commenter les résultats obtenus.

Agrégation SES
Sujet N° 10

Exercice 1

Des voitures arrivent de façon aléatoire au péage d'une autoroute. On suppose que la variable aléatoire N_t correspondant au nombre de ces voitures arrivant entre les instants 0 et t suit une loi de Poisson de paramètre $a \times t$. (on a donc $P(N_t = n) = (a \times t)^n \times \frac{1}{n!} \exp(-a \times t)$ où n ! = 1*2*3*...*n)

Question 1

On note X_1 l'instant d'arrivée de la première voiture. Déterminer la loi de X_1. (on pourra chercher à calculer $P(X_1>t)$ en utilisant la loi de N_t).

Question 2

Soit X_n l'instant d'arrivée de la n-ième voiture. Montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire X_n est la suivante :

$$F_{X_n}(t) = 1 - \exp(-a \times t) \times \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(a \times t)^k}{k!}$$

En déduire la fonction densité de X_n. Après avoir effectué l'étude fonctionnelle (tableau de variation...) tracer la courbe représentative de cette fonction.
Calculer l'espérance et la variance de X_n.

Exercice 2

On suppose que l'évolution de l'économie d'un pays peut être modélisée de la façon suivante :

- $C_n = 0{,}75\ Y_n + 100$
- $I_n = 0{,}1\ Yn - 0{,}05\ (Y_n - Y_{n-1})$
- $Y_n = C_n + I_n + G_n$

où I_n, C_n , Y_n et G_n sont respectivement l'investissement, la consommation, la production totale et la dépense publique à la date n.

Question 1

Ecrire ce système sous la forme $A \times \begin{pmatrix} C_n \\ I_n \\ Y_n \end{pmatrix} = B \times \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{n-1} \\ G_n \end{pmatrix}$

où A et B sont des matrices carrées 3*3 et où B est diagonale.

Question 2

Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

En déduire l'expression d'une matrice C telle que $\begin{pmatrix} C_n \\ I_n \\ Y_n \end{pmatrix} = C \times \begin{pmatrix} 1 \\ Y_{n-1} \\ G_n \end{pmatrix}$

Question 3

On suppose que la dépense publique est contante et que $G_n = 10$.
Calculer alors Y_n en fonction de Y_0.

Sujet 12

Exercice 1

Dans une région de superficie S à forte densité démographique, la surface urbanisée représentait en 1990 le quart de sa superficie. On note $y(t)$ la surface urbanisée au 1[er] janvier de l'année $1991 + t$. Du 1[er] janvier 1991 au 1[er] janvier 2001, cette surface urbanisée s'est accrue de 65 %.

1. Si l'on retient l'hypothèse d'une croissance exponentielle, quelle pourcentage de la région sera urbanisée en 2011 ? en quelle année la région sera-t-elle totalement urbanisée ?

2. Architectes et urbanistes travaillent à un projet qui, en permettant de bâtir davantage en hauteur, permettrait de réduire de 76 % le taux de croissance annuel de la surface urbanisée. Ils prévoient la mise en œuvre de ce projet en 2011. Donner la nouvelle expression de $y(t)$. De combien d'années retardera-t-on le moment où toute la surface de la région sera urbanisée ?

Exercice 2

1. Montrer que $M = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ admet deux valeurs propres 10 et 2.

2. Déterminer les sous-espaces propres associés à chacune des valeurs propres.

3. M est-elle diagonalisable ?

Exercice 3

Une entreprise désire prévoir chaque année l'indice de satisfaction de ses clients. Ceux-ci sont classés en trois catégories : *satisfait*, *indifférent*, *mécontent*.

On note x_n, y_n, z_n les proportions de clients *satisfaits*, *indifférents* et *mécontents*.

A l'ouverture de l'entreprise (année 0), les clients sont tous considérés comme *indifférents*.

Pour effectuer une prévision, on part des hypothèses suivantes

Un client *satisfait* une année a :

- 60 % de chances de rester *satisfait* l'année suivante
- 20 % de chances de devenir *indifférent* l'année suivante
- 20 % de chances de devenir *mécontent* l'année suivante

Un client *indifférent* une année a :

- 50 % de chances de devenir *satisfait* l'année suivante
- 40 % de chances de rester *indifférent* l'année suivante
- 10 % de chances de devenir *mécontent* l'année suivante

Un client *mécontent* une année a :

- 40 % de chances de devenir *satisfait* l'année suivante
- 20 % de chances de devenir *indifférent* l'année suivante
- 40 % de chances de rester *mécontent* l'année suivante

1. Montrer que, pour tout $n \geq 1$, $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \\ z_{n-1} \end{pmatrix}$, où A est une matrice carrée d'ordre 3 que l'on exprimera en fonction de M.

2. Montrer qu'il existe trois réels x, y, et z tels que, si une année les proportions de *satisfaits*, *indifférents* et *mécontents* sont égaux respectivement à x, y, et z, alors pour les années suivantes ces proportions restent constantes. (cette question utilise l'exercice 2)

3. On note $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$. En utilisant le fait que, pour tout $n \geq 0$, $x_n + y_n + z_n = 1$, montrer que l'on peut écrire $X_n = BX_{n-1} + C$ où B est une matrice carrée d'ordre 2 et C est une matrice à 2 lignes et une colonne. Préciser B et C.

4. Exprimer x_n et y_n en fonction de n, puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$, $\lim\limits_{n\to+\infty} z_n$.