Annexe
au rapport du jury du concours interne
de l'agrégation de sciences économiques et sociales

Exemples d'exercices de l'épreuve orale de mathématiques et statistiques appliquées aux sciences économiques et sociales

Exercice 1

Dans cet exercice, C désigne un réel strictement positif et x désigne un réel de l'intervalle $]0;1[$.
On se propose de comparer les deux placements suivants :

1. On place un capital C au taux d'intérêt annuel x pendant 2 années

(par exemple, si le taux est de 4 % , on pose : $x = 0{,}04$).

2. On place un capital C au taux d'intérêt annuel $2x$ pendant 1 an puis au taux d'intérêt y l'année

suivante.

a. Déterminer, en fonction de x, le capital C_1 obtenu dans le premier cas de placement.
b. Déterminer, en fonction de x et de y, le capital C_2 obtenu dans le deuxième cas de placement.
3. Montrer que l'égalité des placements, c'est-à-dire l'égalité $C_1 = C_2$, équivaut à une égalité de la
forme $y = f(x)$ où f est une fonction que l'on explicitera.
4. Étudier sur $]0;1[$, les variations de la fonction f.
5. Peut-on avoir y=x/2
6. Déterminer y lorsque $x = 0{,}1$ (placement à 10 % sur les deux années).
7. Déterminer x lorsque $y = 0{,}01$ (placement à 1 % sur la deuxième année).

Exercice 2

On s'intéresse au temps de trajet domicile travail des salariés d'une très grande entreprise. On note X le temps de trajet d'un salarié tiré au hasard dans l'ensemble des salariés et l'on suppose que X suit une loi Normale de moyenne m et d'écart-type inconnus.

Le tableau suivant donne la répartition de X (exprimée en minutes) pour un échantillon de 600 salariés de cette entreprise :

Durée	<10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	>=60
Effectif	52	98	127	151	83	52	37

On donne la valeur moyenne de ces 600 observations : 32,4 minutes

1. Parmi ces trois durées : 2 minutes, 20 minutes, 45 minutes, laquelle vous semble la plus proche de l'écart-type de ces observations ? (répondez sans aucun calcul et justifiez).

2. On pose yi= $\frac{xi-35}{10}$ et on donne var(Y)=2,6257 mn². Déduisez-en la variance de X, puis l'écart-type de X.

3. On suppose que la distribution du temps de trajet suit une loi normale de paramètres m=32,4 mn et =16,2mn.

3-1 Calculez la valeur A telle 75% des salariés ait un temps de trajet supérieur à A.

3-2 Calculez à partir des observations, la valeur A' telle que 75% des salariés ait un temps de trajet supérieur à A'. Comment s'appelle cette valeur.

4. Déterminer une estimation ponctuelle du temps moyen de trajet m de tous les salariés et une estimation par intervalle de confiance avec un risque de 5%. Explicitez soigneusement la démarche.

Exercice 3

Le taux de pannes d'une centrifugeuse étant trop élevé, son fabricant décide de rappeler les 10 000 unités déjà vendues en France en diffusant un communiqué dans la presse.
On estime à 0,1 la probabilité qu'une quelconque de ces centrifugeuses soit retournée à l'un des concessionnaires.
Les retours sont indépendants les uns des autres.

Soit *Y* la variable aléatoire égale au nombre de centrifugeuses retournées dans toute la France.

1. Quelle est la loi de *Y* ? Donner $E(Y)$ et $V(Y)$.

2. Justifier que l'on peut approcher la loi de *Y* par une loi normale dont on donnera les paramètres.

3. Déterminer la probabilité $P(970 \leq Y \leq 1030)$.

4. Déterminer le plus grand entier *N* tel que $P(Y \geq N) \geq 0{,}9772$.

5. Que représente la variable aléatoire Y/ 10 000. Déterminer sa loi.

Exercice 4

Une étude statistique a permis d'établir qu'à partir du début de l'année 1990, le taux des ménages équipés d'un ordinateur dans une ville V est donné approximativement, en fonction du nombre *t* d'années écoulées depuis le début de l'année 1990, par

$$f(t) = \frac{1}{1 + k\,\mathrm{e}^{-at}}$$, où *k* et *a* sont deux nombres réels positifs.

D'après cette étude, on sait qu'au début de l'année 1990, 20 % des ménages étaient équipés d'un ordinateur et qu'au début de l'année en 1999, 40 % des ménages l'étaient.

1) Déterminer les valeurs exactes de k et a, puis donner la valeur décimale arrondie à 10^{-2} près de *a.*

Etude de la fonction *f*.
On admet que la fonction *f* est définie pour tout nombre réel *t* appartenant à l'intervalle [0;+∞[par : $f(t) = \dfrac{1}{1 + 4\mathrm{e}^{-0{,}11t}}$.

On note c sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).
(unités graphiques : 0,5 cm sur l'axe des abscisses, 10 cm sur l'axe des ordonnées).

2) **a)** Etudier la limite de *f* en + ∞ et en déduire que c admet une asymptote, notée (Δ), dont on donnera une équation.

b) Déterminer la fonction dérivée de la fonction *f*.

c) Dresser le tableau de variation de *f*.

d) Tracer (Δ) et c (placer en particulier les points de c d'abscisses respectives 20 et 40).

e) Résoudre algébriquement l'équation $f(t)=0{,}6$ et faire apparaître sur la figure les traits permettant de visualiser cette résolution.

3) Calculer la valeur moyenne de *f* sur l'intervalle $[7;9]$

On suppose que $f(t)$ est une approximation satisfaisante, au moins jusqu'en 2010, du taux des ménages équipés d'un ordinateur dans la ville V.
En utilisant cette approximation et des résultats obtenus à la partie B, déterminer :

4) le pourcentage des ménages équipés d'un ordinateur au début de l'année 2010 ;

5) l'année à partir de laquelle 60 % des ménages seront équipés d'un ordinateur ;

6) une valeur approchée du pourcentage moyen des ménages équipés d'un ordinateur entre le début de l'année 1997 et le début de l'année 1999.

Exercice 5 (Les deux parties sont indépendantes)

Première Partie

Un sondage aléatoire avec tirage avec remise est-il plus précis lorsque la taille de l'échantillon est de 1 000 parmi une population de 1 million d'individus ou bien lorsque la taille de l'échantillon est de 2 000 parmi une population de 10 millions d'individus ? Justifiez. Préciser le modèle de l'inférence statistique utilisé.

Deuxième Partie

Lors d'un référendum, un sondage aléatoire simple avec remise pratiqué sur 1000 personnes a donné 55 % pour le Oui et 45 % pour le Non.

1. Déterminer un intervalle contenant le pourcentage de Oui avec une probabilité de 0.95.

2. Peut-on considérer, avec une probabilité de 0.95, que le Oui l'emporte ? La réponse est-elle la même avec un niveau de confiance de 0.99 ?

3. Si, pour un référendum, on sait que "oui" se situe autour de 50 %, combien de personnes faudrait-il interroger pour que la proportion de "Oui" soit connue à 1 % près (en plus ou en moins), avec un niveau de confiance de 0.95.

4. Même question si l'on sait qu'il se situe entre 60 et 80 %.

5. Dans ce même sondage auprès de 1000 personnes, on compte également 480 hommes et 520 femmes. Si les variables « issue du référendum » et « sexe » étaient indépendantes, quels seraient les effectifs du tableau croisant ces 2 variables.

6. Expliciter la démarche du test du Khi-deux d'indépendance.

Exercice 6

n désignant un entier naturel supérieur ou égal à 2 , on se propose de comparer les deux placements suivants :

- Placer au taux d'intérêt *r* un capital n*C* pendant *t* années.
- Placer au taux d'intérêt n*r* un capital *C* pendant *t* années.

1. *Expressions des capitaux obtenus après t années de placement :*
a) Quel capital obtient-on en plaçant un capital n*C* pendant un an au taux d'intérêt *r* ?
Déterminer le capital $C_1(t)$ obtenu en plaçant au taux d'intérêt *r* un capital n*C* pendant *t* années.
b) Quel capital obtient-on en plaçant un capital *C* pendant un an au taux d'intérêt n*r* ?
Déterminer capital $C_2(t)$obtenu en plaçant au taux d'intérêt n*r* un capital *C* pendant *t* années.
c) Déterminer, en fonction de *r et de n*, le nombre réel *t* tel que $C1(t) = C2(t)$.
2. *Étude, en fonction de r, du temps d'égalisation des deux capitaux obtenus :*
Pour tout réel *r* strictement positif, on pose : T(r) = ln(n)/(ln(1+nr)-ln(1+r))
.
a) Déterminer la dérivée et le sens de variation de la fonction u définie par :
$u(r) = \ln(1+ nr) - \ln(1+ r)$.
b) En déduire le sens de variation de la fonction *T* lorsque r varie de 0 à +∞
c) Déterminer la limite de la fonction T en +∞ Interpréter le résultat obtenu.
d) On choisit n=2. Déterminer le taux *r* pour que les capitaux soient égaux après 20 années de placement.