Sujet A

Exercice 1

Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 0 \\ 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \exp\left(-\frac{x}{2}\right) & si \quad x \geqslant 0 \end{cases}$

1. *Justifier que F est continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Déterminer* $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$
3. *Soit X une variable aléatoire à valeurs réelles de fonction de répartition F.*
   Déterminer une fonction densité f de X.
4. *Étudier les variations de la fonction f et représenter l'allure du graphe de cette fonction.*

Solution

1. F est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme composée, somme, produit de fonctions continues.
   F est continue en 0 car : $\lim\limits_{x \to 0\ ,\ x<0} F(x) = \lim\limits_{x \to 0\ ,\ x<0} 0 = 0 = \lim\limits_{x \to 0\ ,\ x \geqslant 0} F(x) = \lim\limits_{x \to 0\ ,\ x \geqslant 0} 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$.
   F est donc continue sur $\mathbb{R}$.
2. On sait que $\lim\limits_{y \to +\infty} y e^{-y} = \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$.
   En posant $y = \frac{x}{2}$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x}{2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) = 0$ et, par suite, $\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \exp\left(-\frac{x}{2}\right) = 1 - 0 = 1$
   $$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$$
3. F est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et : $\forall x < 0\ ,\quad F'(x) = 0$
   F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et : $\forall x > 0\ ,\quad F'(x) = -\frac{1}{2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) - \left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right) \exp\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{x}{4} \exp\left(-\frac{x}{2}\right)$
   En utilisant les formules $(u \times v)' = u'v + u\,v'$ et $\exp(u(x))' = u'(x).\exp(u(x))$
   Au passage, mais non strictement nécessaire pour résoudre la question :
   Pour la dérivabilité de F en zéro, on remarque que $\lim\limits_{x \to 0^+} F'(x) = 0 = \lim\limits_{x \to 0^-} F'(x)$. D'après le théorème de la limite de la dérivée, les conditions F est continue sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[$ et $\lim\limits_{x \to 0} F'(x) = 0$ permettent d'en déduire que F est dérivable en zéro et que $F'(0) = 0$.
   On revient à la question :
   La fonction $f = F'$ est une fonction densité de la variable aléatoire X. On pose donc $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} & \text{si } x \geqslant 0\,; \\ 0 & \text{si } x < 0. \end{cases}$
4. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
   La dérivée de f est nulle sur $]-\infty, 0[$.
   Le calcul de la dérivée sur $]0, +\infty[$ donne $f'(x) = \frac{1}{8}(2 - x)e^{-\frac{x}{2}}$.
   La fonction f croissante sur $[0, 2]$ puis décroissante sur $[2, +\infty[$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. L'axe des abscisses est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.
   On remarque que f n'est pas dérivable en 0 : f admet une dérivée à gauche $f'_g(0) = 0$ et une dérivée à droite $f'_d(0) = \frac{1}{4}$ qui ne sont pas égales (on a un point anguleux).
   Justification : $\lim\limits_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^-} 0 = 0 = f'_g(0)$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{4} = f'_d(0)$

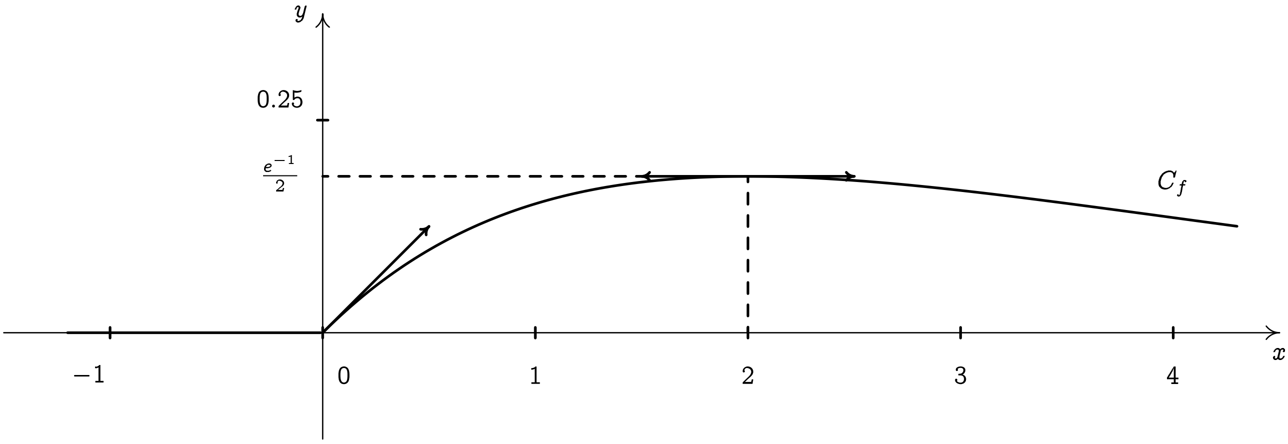

FIG. 1 – graphe de la fonction f

Exercice 2

Soit A la matrice définie par $A = \begin{pmatrix} -1 & 3/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. *Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A. La matrice A est-elle diagonalisable ?*
2. *Calculer A^n pour tout entier naturel n.*
3. *Montrer que A est inversible, et calculer A^{-n} pour tout entier naturel n.*
4. *Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On note $p_n = P(X = n)$. On suppose que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $p_{n+2} = -p_{n+1} + \frac{3}{4}p_n$. Déterminer l'expression de p_n en fonction de n. Quelle est la loi de X ?*

Solution

1. Le polynôme caractéristique de A s'obtient avec le déterminant suivant :
$$Det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3/4 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + \lambda - \frac{3}{4} = \left(\lambda + \frac{3}{2}\right)\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)$$
Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique : $\lambda_1 = -\frac{3}{2}$ et $\lambda_2 = \frac{1}{2}$.
Déterminons les vecteurs propres :
   - Pour $\lambda = \lambda_1 = -\frac{3}{2}$, on a :
   $$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x/2 & +3/4y & = 0 \\ x & +3y/2 & = 0 \end{cases} \iff 2x = -3y \iff \exists t \in \mathbb{R} \text{ t.q. } (x, y) = t.(3, -2)$$
   L'espace propre associé à λ_1 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_1 = (3, -2)$.
   - Pour $\lambda = \lambda_2 = \frac{1}{2}$, on a :
   $$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1.\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -3x/2 & +3/4y & = 0 \\ x & -y/2 & = 0 \end{cases} \iff y = 2x \iff (x, y) = x.(1, 2)$$
   L'espace propre associé à λ_2 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_2 = (1, 2)$.

   La matrice A est d'ordre 2 et admet 2 valeurs propres distinctes. C'est une condition suffisante pour en déduire que A est diagonalisable.

2. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$. Utillisons la méthode du pivot de Gauss pour calculer P^{-1} :
$$\begin{array}{lll} P = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2 - 2\ell_1 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \\ \ell_1 \leftarrow 8\ell_1 + 3\ell_2 \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \ell_1 \leftarrow \ell_1/8 \\ \ell_2 \leftarrow \ell_2/(-8) \end{array} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1/4 & 3/8 \\ 1/4 & -1/8 \end{pmatrix} = P^{-1}$$

D'après le principe de la diagonalisation : $D = P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & -3/2 \end{pmatrix}$ et $A = P.D.P^{-1}$.

On en déduit que $A^n = A \times A \times \cdots \times A = P.D.P^{-1} \times P.D.P^{-1} \times \cdots \times P.D.P^{-1} = P.D^n.P^{-1}$ soit :

$$A^n = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{3}{4}.\left(-\frac{3}{2}\right)^n & \frac{3}{8}.\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{3}{8}.\left(-\frac{3}{2}\right)^n \\ \frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}.\left(-\frac{3}{2}\right)^n & \frac{3}{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}.\left(-\frac{3}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

(formule valable y compris pour $n = 0$)

3. *première solution :* 0 n'est pas valeur propre de A donc A est inversible.

   deuxième solution : $\text{Det}(A) = -\frac{3}{4} \neq 0$ donc A est inversible.

   rappelons que "A diagonalisable" et "A inversible" sont deux notions distinctes sans lien de cause à effet dans un sens ni dans l'autre

   D et A étant inversibles on a : $A^{-1} = \left(P.D.P^{-1}\right)^{-1} = P.D^{-1}.P^{-1} = P.\begin{pmatrix} (1/2)^{-1} & 0 \\ 0 & (-3/2)^{-1} \end{pmatrix}.P^{-1}$

   Par le même raisonnement que ci-dessus (et sachant que $(1/2)^{-1} = 2$ et $(-3/2)^{-1} = -2/3$) on a :

$$A^{-n} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4}.2^n + \frac{3}{4}.\left(-\frac{2}{3}\right)^n & \frac{3}{8}.2^n - \frac{3}{8}.\left(-\frac{2}{3}\right)^n \\ \frac{1}{2}.2^n - \frac{1}{2}.\left(-\frac{2}{3}\right)^n & \frac{3}{4}.2^n + \frac{1}{4}.\left(-\frac{2}{3}\right)^n \end{pmatrix}$$

4. On remarque que, pour tout entier naturel n, on a $\begin{pmatrix} p_{n+2} \\ p_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3/4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ p_n \end{pmatrix}$.

   Si on pose la matrice colonne $U_n = \begin{pmatrix} p_{n+1} \\ p_n \end{pmatrix}$, on reconnaît une relation de la forme : $U_{n+1} = A.U_n$.

   Montrons par résurrence que, pour tout entier naturel n, on a $U_n = A^n.U_0$.

   initialisation : Au rang $n = 0$, on a $U_0 = A^0.U_0 = I.U_0$ qui est vérifié.

   hérédité : Supposons la relation établie au rang n, alors :

   $U_{n+1} = A.U_n = A.A^n.U_0 = A^{n+1}.U_0$ La formule est vérifiée au rang $n + 1$.

   Conclusion : on a bien montré par récurrence que pour tout n on a : $U_n = A^n.U_0$.

   Ici, la deuxième ligne de cette égalité nous donne :

$$p_n = \left[\frac{1}{2}.\left(\frac{1}{2}\right)^n - \frac{1}{2}.\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right] p_1 + \left[\frac{3}{4}.\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{4}.\left(-\frac{3}{2}\right)^n\right] p_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}p_1 + \frac{3}{4}p_0\right) + \left(-\frac{3}{2}\right)^n \left(-\frac{1}{2}p_1 + \frac{1}{4}p_0\right)$$

   On sait que, comme toute probabilité, $0 \leqslant p_n \leqslant 1$. Ayant de plus $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$, cela implique que le terme contenant $\left(-\frac{3}{2}\right)^n$ en facteur est nécessairement nul.

   Donc $p_0 = 2p_1$ et $p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}p_1 + \frac{3}{4}p_0\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n .p_0$.

   De la condition $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, on récupère enfin $p_0 = \frac{1}{2}$ (on sait que, pour $-1 < q < 1$, on a $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$)

   La loi de X est définie par $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \ P(X = n) = p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

Sujet B

Exercice 1

Dans une entreprise de 400 salariés, la moyenne et l'écart-type du salaire mensuel de tout le personnel sont respectivement $\overline{x} = 1500$ € et $\sigma = 300$ €. Le salaire le plus bas est 1000 € et le salaire le plus élevé est 4500 €. A la suite d'une grève, des négociations salariales aboutissent à l'accord suivant : le salaire de chaque salarié sera majoré en appliquant la formule générale $y_i = ax_i + b$, où :
- *le nombres x_i et y_i représentent les salaires du salarié i respectivement avant et après l'augmentation*
- *les coefficients a et b sont à déterminer.*

Trois propositions sont sur la table des négociations :
P_1 : augmenter la masse salariale de 5 % tout en laissant inchangée la dispersion des salaires mesurée par l'écart-type ;
P_2 : augmenter la masse salariale de 5 % tout en laissant inchangée la dispersion relative des salaires mesurée par le coefficient de variation $CV = \dfrac{\text{écart-type}}{\text{moyenne}}$;
P_3 : réduire de 2 % la dispersion des salaires mesurée par l'écart-type tout en augmentant la masse salariale d'un montant tel qu'aucun salaire ne diminue.

1. *Calculer la masse salariale et le coefficient de variation des salaires avant l'augmentation.*
2. *Pour chacune des trois propositions :*
   (a) *Déterminer les coefficients a et b à utiliser.*
   (b) *Calculer la moyenne du nouveau salaire mensuel.*
3. *Autour de la table de négociations, on trouve trois groupes : des représentants de la direction, des représentants des cadres et des représentants des salariés non cadres, chacun ayant formulé une des trois propositions.*
   (a) *Calculer, en pourcentage, l'augmentation de la masse salariale correspondant à la proposition P_3.*
   (b) *Donner l'allure de la représentation graphique, dans un même repère, du nouveau salaire y en fonction de l'ancien x pour chacune des propositions.*
   (c) *Identifier de quel groupe émane chacune des propositions.*

Solution

1. La masse salariale initiale vaut : $M_0 = \overline{x} \times 400 = 600\,000$ €.
   On obtient comme coefficient de variation des salaires avant augementation $CV_0 = \dfrac{\text{écart-type}}{\text{moyenne}} = \dfrac{1}{5} = 0.2$
2. On va augmenter les salaires selon la formule $y_i = ax_i + b$. On a donc : $\overline{y} = a\overline{x} + b$ et $\sigma_y = |a|\sigma_x$.
   Proposition P_1 : augmenter la masse salariale de 5 % tout en laissant inchangée la dispersion des salaires mesurée par l'écart-type ;
   - Le nouvel écart-type $\sigma_y = |a|\sigma_x$. L'écart-type reste inchangé dans cette proposition donc : $a = \pm 1$.
     L'interprétation économique d'un choix de $a = -1$, avec un renversement de l'échelle des salaires (les patrons gagnent moins que les ouvriers !) nous amène à opter pour $a = 1$.
   - La moyenne des nouveaux salaires sera de $\overline{y} = a\overline{x} + b = \overline{x} + b$.
     La nouvelle masse salariale sera donc $M_1 = \overline{y} \times 400 = M_0 + 400 \times b$.
     L'augmentation de 5% représente une somme de $30\,000 = 400 \times b$. Ce qui permet d'en déduire $b = 75$€.

   La formule retenue est $\boxed{y_i = x_i + 75}$. Dans ce cas, le salaire le plus bas sera de 1075 € , le salaire le plus élevé de 4575 €, et la moyenne des salaires sera $\overline{y} = 1575$
   Proposition P_2 :augmenter la masse salariale de 5 % tout en laissant inchangée la dispersion relative des salaires mesurée par le coefficient de variation $CV = \dfrac{\text{écart-type}}{\text{moyenne}}$
   - La masse salariale augmente de 5% donc : $M_1 = 400 \times \overline{y} = M_0\left(1 + \frac{5}{100}\right) = 400 \times \overline{x} \times \left(1 + \frac{5}{100}\right)$.
     On en déduit $\overline{y} = \overline{x} \times \left(1 + \frac{5}{100}\right) = 1575$.
     Le coefficient de variation reste inchangé : $\dfrac{\sigma_y}{\overline{y}} = \dfrac{\sigma_x}{\overline{x}}$ et sachant que $\sigma_y = |a|\sigma_x$, on a donc $|a| = \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x} = \dfrac{\overline{y}}{\overline{x}} = 1.05$

L'interprétation économique d'un choix de $a = -1.05$, avec un renversement de l'échelle des salaires (les patrons gagnent moins que les ouvriers !) nous amène à opter pour $a = 1.05$.

- Des relations $\overline{y} = 1.05\overline{x}$ et $y_i = ax_i + b \Rightarrow \overline{y} = 1.05\overline{x} + b$, on en déduit que $b = 0$.

La formule retenue est $\boxed{y_i = 1.05\,x_i}$.Dans ce cas, le salaire le plus bas sera de 1050 € , le salaire le plus élevé de 4725 €, et la moyenne des salaires sera $\overline{y} = 1575$

Proposition P_3 : réduire de 2 % la dispersion des salaires mesurée par l'écart-type tout en augmentant la masse salariale d'un montant tel qu'aucun salaire ne diminue.

- $\sigma_y = |a|\sigma_x$ donc $|a| = 0.98 = a$.
- On a $y_i = a\,x_i + b = 0.98\,x_i + b$. Aucun salaire ne diminue, donc pour tout i : $0.98\,x_i + b \geqslant x_i \iff b \geqslant 0.02\,x_i$. Cette condition doit être vérifiée pour tous les salaires, ce qui équivaut à ce qu'elle soit vérifiée pour le salaire le plus élevé : $b \geqslant 90$.

S'adressant à des économistes, et ayant le souci de la rentabilité, on retiendra la formule $\boxed{y_i = 0.98\,x_i + 90}$. Dans ce cas, le salaire le plus bas sera de 1090 € , le salaire le plus élevé de 4500 €, et la moyenne des salaires sera $\overline{y} = 1560$. La nouvelle masse salariale sera de 624 000 € ce qui représente une augmentation de 4%

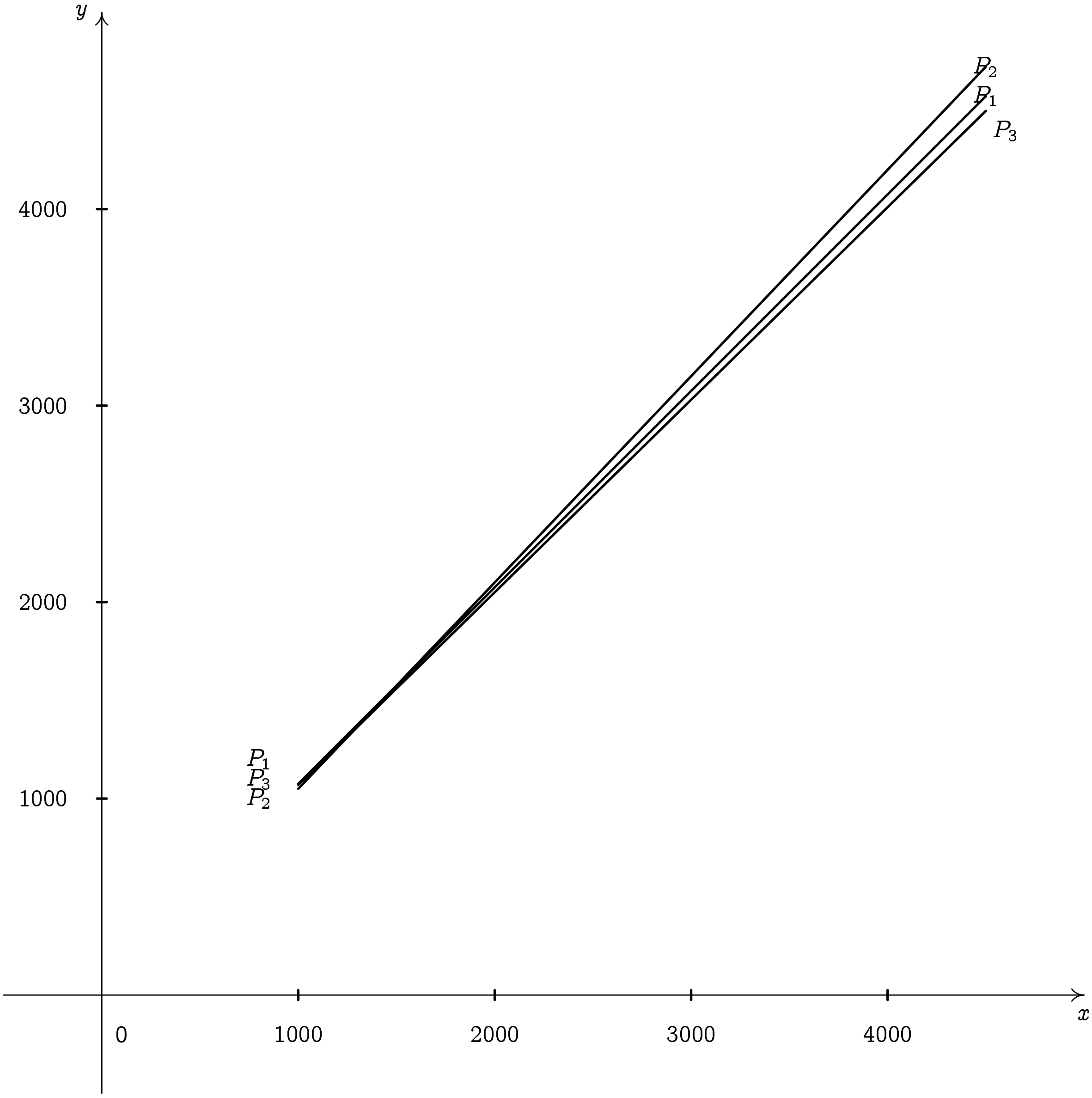

FIG. 2 – graphes des nouveaux salaires en fonction des anciens

Interprétation :

La direction souhaite une augmentation de la masse salariale la plus faible possible : elle propose P_3.

Les cadres proposent P_2 et les salariés non cadres proposent P_1.

Exercice 2

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note E_n l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels et de degré inférieur ou égal à n. On considère les applications f et g définies sur E_n de la façon suivante : pour $P \in E_n$, $f(P) = P - P'$ et $g(P) = P + P' + \cdots + P^{(n)}$ ($P^{(n)}$ désigne la n-ième dérivée de P).

1. *Déterminer les images par f et g des polynômes suivants : 1, X et X^2.*
2. *Justifier que f et g sont des applications linéaires.*
3. *Déterminer $g \circ f(P)$ et $f \circ g(P)$ pour $P \in E_n$. Que peut-on en déduire ?*

Solution

1. $f(1) = 1$, $f(X) = X - 1$, $f(X^2) = X^2 - 2X$, $g(1) = 1$, $g(X) = X + 1$, $g(X^2) = X^2 + 2X + 2$
2. Soient P, Q, deux polynômes et λ, μ des réels :
   $f(\lambda P + \mu Q) = \lambda P + \mu Q - (\lambda P + \mu Q)' = \lambda P + \mu Q - \lambda P' - \mu Q' = \lambda f(P) + \mu f(Q)$
   f est bien une application linéaire.
   $g(\lambda P + \mu Q) = \lambda P + \mu Q + (\lambda P + \mu Q)' + \cdots + (\lambda P + \mu Q)^{(n)} = \lambda P + \mu Q + \lambda P' + \mu Q' + \cdots + \lambda P^{(n)} + \mu Q^{(n)}$
   $= \lambda g(P) + \mu g(Q)$
   g est bien une application linéaire.
3. $g \circ f(P) = g(f(P)) = g(P - P') = P - P' + (P - P')' + \cdots + (P - P')^{(n)} = P - P' + P' - P'' + \cdots + P^{(n)} - P^{(n+1)}$
   $= P - P^{(n+1)}$
   Sachant que P est un polynôme de degré inférieur ou égal à n, $P^{(n+1)} = 0$
   Donc, pour tout polynôme P de E_n, on a : $g \circ f(P) = P$.
   $f \circ g(P) = f(g(P)) = f(P + P' + \cdots + P^{(n)}) = P + P' + \cdots + P^{(n)} - (P + P' + \cdots + P^{(n)})' = P - P^{(n+1)} = P$
   Donc, pour tout polynôme P de E_n, on a : $f \circ g(P) = P$.
   On a donc $g \circ f = Id_{E_n} = g \circ f$ où I_{E_n} représente l'application identique de E_n.
   f et g sont bijectives et réciproques l'une de l'autre ($f^{-1} = g$).

Sujet C

Exercice 1

Un viticulteur possède un grand nombre de pieds de vignes. Ceux-ci ont la probabilité 0,4 d'être atteints par une maladie. On observe 450 pieds et l'on désigne par X le nombre de pieds malades dans cet échantillon.

1. *Quelle est la loi de probabilité de X ? Calculer son espérance et sa variance.*
2. *Justifier que l'on peut approcher la loi de X par une loi normale, dont on précisera les paramètres.*
3. *En déduire les probabilités des événements suivants :*
   A : il y a plus de 170 pieds malades dans l'échantillon
   B : le nombre de pieds malades est compris entre 180 et 195.

Solution

1. Lors de $n = 450$ expériences identiques et indépendantes (on fait des mathématiques !) à deux issues (avec $p = P(\text{"le pied est malade"}) = 0,4)$, X est la variable aléatoire qui compte le nombre de pieds malades.
   X suit donc une loi binômiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(450; 0.4)$.
   $E(X) = n.p = 450 \times 0,4 = 180$ et $V(X) = n.p.q = 450 \times 0,4 \times 0,6 = 108$
2. $\left.\begin{array}{r} n \geqslant 30 \\ n.p > 15 \\ n.p.q > 5 \end{array}\right\} \Rightarrow$ les conditions sont réunies pour pouvoir approcher X par une variable $N \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma)$ avec
   $m = 180$ et $\sigma = \sqrt{108} = 6\sqrt{3} \simeq 10,39$
3. Par correction de continuité : $P(X > 170) = P(X \geqslant 171) \simeq P(N \geqslant 170,5)$. Rappelons à ce sujet que pour une variable Y à densité (ou continue), on a $P(Y \leqslant k) = P(Y < k)$ alors que ce n'est pas le cas pour une variable discrète quelconque (loi binômiale, ...). L'idée de la correction de continuité est "puisqu'on hésite entre 170 et 171 , on n'a qu'à prendre 170,5 !"

On passe par la variable centrée réduite $N^* = \dfrac{N-m}{\sigma}$. De part les propriétés des lois normales, on sait que $N^* \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Ceci nous permet d'utiliser la fonction de répartition Φ de la loi normale centrée réduite dont on a la table :
$P(N \geqslant 170,5) = P\left(N^* \geqslant \dfrac{-9,5}{6\sqrt{3}}\right) = 1 - P\left(N^* \leqslant -\dfrac{9,5}{6\sqrt{3}}\right) = 1 - \Phi\left(-\dfrac{9,5}{6\sqrt{3}}\right) = \Phi\left(\dfrac{9,5}{6\sqrt{3}}\right) \simeq \phi(0,914) \simeq 0,82$
Sans la correction de continuité, on trouve le même résultat : $P(A) \simeq 0,82$.
Pour $P(B)$, sans effectuer de correction de continuité :
$P(180 \leqslant X \leqslant 195) \simeq P(180 \leqslant N \leqslant 195) = P(0 \leqslant N^* \leqslant \dfrac{15}{6\sqrt{3}}) \simeq \Phi(1,44) - \Phi(0) \simeq 0,92 - 0,5$
on trouve : $P(B) \simeq 0,42$.

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et f_n la fonction définie par $f_n(x) = -1 + x + x^2 + \cdots + x^n$.

1. *Etudier la fonction f_n sur $[0,1]$.*
2. *En déduire que, pour tout $n \geqslant 1$, il existe un unique x_n dans $]0,1[$ tel que $f_n(x_n) = 0$.*
3. *Calculer x_1 et x_2.*
4. (a) *Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante. En déduire qu'elle converge.*

   (b) *Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}{x_n}^{n+1}$*
   En déduire la limite de la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$.

Solution

1. $f'_n(x) 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$. Sur l'intervalle $[0,1]$, cette dérivée est strictement positive et la fonction f_n est strictement croissante.

   Le tableau de variations de f est le suivant :

x	0		1
f_n	-1	$\nearrow$	$n-1$

2. La fonction f_n est srictement croissante continue sur l'intervalle $[0,1]$. Elle réalise donc une bijection de l'intervalle $[0,1]$ sur l'intervalle image $[-1, n-1]$. Or 0 appartient à l'intervalle image, (car $n \geqslant 1$), il admet donc un unique antécédent par f_n.
   Pour tout $n \geqslant 1$, il existe donc un unique $x_n \in [0,1]$ tel que $f_n(x_n) = 0$.
3. $f_1(x) = 0 \iff -1 + x = 0 \iff x = x_1 = 1$.
   $f_2(x) = 0 \iff -1 + x + x^2 = 0 \iff x = x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ sachant que l'autre racine de l'équation $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ n'appartient pas à l'intervalle $[0,1]$.
4. (a) On remarque que $f_{n+1}(x_n) = -1 + x_n + {x_n}^2 + \cdots + {x_n}^n + {x_n}^{n+1} = f_n(x_n) + {x_n}^{n+1} = {x_n}^{n+1} > 0$ car $f_n(x_n) = 0$. Ayant alors $f_{n+1}(x_n) \geqslant 0$, on observe le tableau de variations de f_{n+1} :

x	0		x_{n+1}		1
f_{n+1}	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	n

   pour voir que $f_{n+1}(x) > 0 \iff x > x_{n+1}$
   Conclusion : pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $x_n \geqslant x_{n+1}$. la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.
   la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante et minorée par 0, elle est donc convergente.

   (b) On simplifier l'expression de $f_n(x)$, pour $x \neq 1$:
   $f_n(x) = -2 + (1 + x + x^2 + \cdots + x^n) = -2 + \dfrac{1-x^{n+1}}{1-x}$
   Lorsque $x = x_n$, pour $n \geqslant 2$, on obtient l'équation $0 = f_n(x_n) = -2 + \dfrac{1-{x_n}^{n+1}}{1-x_n}$ soit $2(1-x_n) = 1 - {x_n}^{n+1}$ ou encore $x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}{x_n}^{n+1}$. (on constate "après-coup" que cette relation est vérifiée aussi par $x_1 = 1$)

On sait que (x_n) est décroissante, donc $\forall n \geqslant 2$, $\quad 0 \leqslant x_n \leqslant x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

On en déduit que $0 \leqslant {x_n}^{n+1} \leqslant \left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}$

Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = 0$, donc, par encadrement , $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} {x_n}^{n+1} = 0$.

On déduit de la relation $x_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}{x_n}^{n+1}$ que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = \frac{1}{2}$.

Sujet D

Exercice 1

1. *Etudier les variations de la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(t) = t - \ln(t) - \dfrac{1}{t}$.*
   En déduire que l'équation $f(t) = 0$ admet une unique solution.
2. *Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[\times]0,+\infty[$ par $g(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x)$*
   (a) *Montrer que si g admet un extremum local au point (x,y) alors*
   $$\ln(x) - \ln(\ln(x)) - \frac{1}{\ln(x)} = 0 \quad \textit{et} \quad y = \frac{x}{\ln(x)}$$
   (b) *Utiliser la question 1. pour étudier l'existence d'extremums de g.*

Solution

1. $f(t) = t - \ln(t) - \dfrac{1}{t}$ et $f'(t) = 1 - \dfrac{1}{t} + \dfrac{1}{t^2} = \dfrac{t^2 - t + 1}{t^2}$.
   Le discriminant du numérateur est strictement négatif, le signe de la dérivée est toujours strictement positif. La fonction f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
   $\displaystyle\lim_{t\to0^+} f(t) = \lim_{t\to0^+} \frac{1}{t}\left(t^2 - t\ln(t) - 1\right) = -\infty$ sachant que $\displaystyle\lim_{t\to0^+} t\ln(t) = 0$.
   $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} t\left(1 - \frac{\ln(t)}{t} - \frac{1}{t^2}\right) = +\infty$ sachant que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\ln(t)}{t} = 0$.
   le tableau de f est :

x	0	1	$+\infty$
f'		$+$	
f	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ $+\infty$

   on note que $f(1) = 0$

   La fonction f est strictement croissante continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$. Par théorème, f réalise une bijection de $]0,+\infty[$ sur l'intervalle image qui est $]-\infty,+\infty[$ (d'après les limites aux bornes). 0 appartient à l'intervalle image, il admet donc un unique antécédent par f : l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution qui se trouve être $x = 1$.
2. (a) Les dérivées partielles d'ordre 1 de g sont : $\dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \ln(y) - \dfrac{y}{x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \dfrac{x}{y} - \ln(x)$.
   Un éventuel extremum local vérifie nécessairement le système suivant :
   $$\begin{cases} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(y) - \dfrac{y}{x} = 0 \\ \dfrac{x}{y} - \ln(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(y) - \dfrac{y}{x} = 0 \\ y = \dfrac{x}{\ln(x)} \end{cases} \iff \begin{cases} \ln\left(\dfrac{x}{\ln(x)}\right) - \dfrac{1}{\ln(x)} = 0 \\ y = \dfrac{x}{\ln(x)} \end{cases}$$
   On obtient donc que si g admet un extremum local au point (x,y) alors
   $$\ln(x) - \ln(\ln(x)) - \frac{1}{\ln(x)} = 0 \quad \text{et} \quad y = \frac{x}{\ln(x)}$$

(b) En posant $t = \ln(x)$, on constate que tout point critique de g est tel que $f(t) = 0$. Ce qui implique $t = 1 \Longleftrightarrow x = e$ et $y = \dfrac{x}{\ln(x)} = e$.

Le seul point critique est tel que $(x, y) = (e, e)$.

Calculons les dérivées partielles secondes en ce point :

$r = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \dfrac{y}{x^2} = \dfrac{1}{e}$, $s = \dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = 0$ et $t = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = -\dfrac{x}{y^2} = -\dfrac{1}{e}$

On a $rt - s^2 < 0$ et le point n'est pas un extremum : g n'admet aucun extremum local.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre λ.

1. *Soit t et s deux réels positifs.*
   (a) *Calculer $P(0 \leqslant X \leqslant t), P(X > t), P(t < X \leqslant t + s)$.*
   (b) *En déduire $P_{X>t}(t < X \leqslant t + s)$.*
2. *Déterminer le réel m tel que : $P(0 \leqslant X \leqslant m) = P(X > m)$.*
3. *Interpréter le résultat précédent lorsque X représente le nombre de noyaux d'un élément radioactif.*

Solution

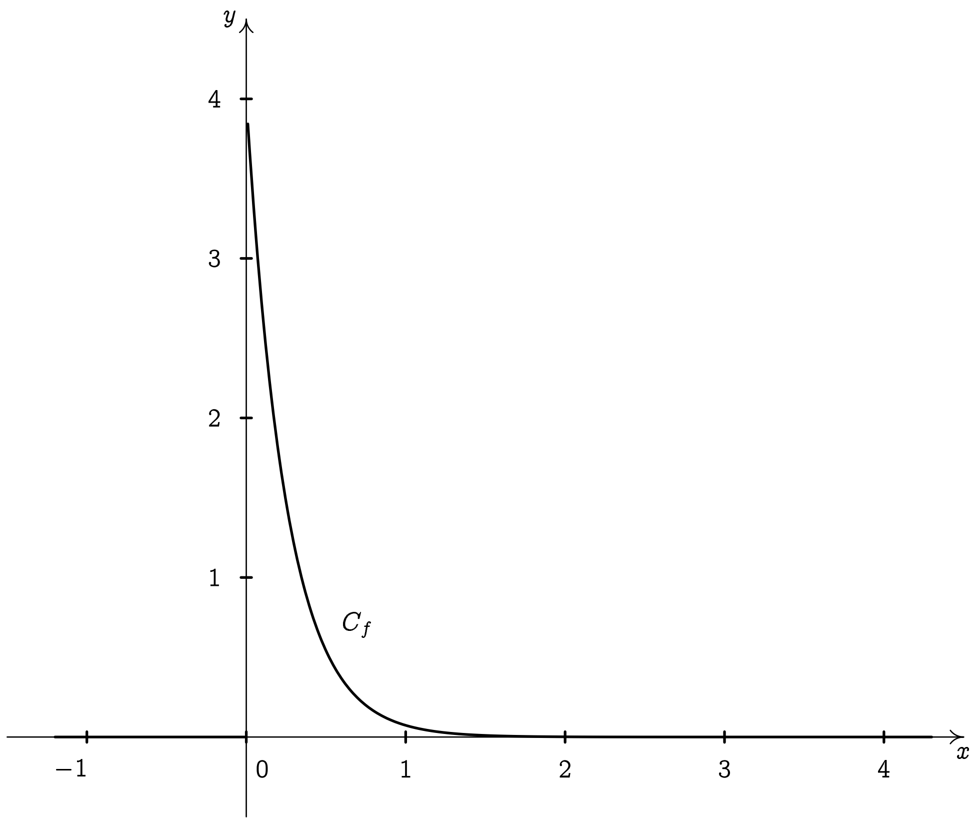

FIG. 3 – graphe d'une densité de X

1. (a) On sait qu'une densité de X est la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \lambda\, e^{-\lambda\, t} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

L'expression de la fonction de répartition de X est donnée par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\, \mathrm{d}t$. Soit :

- si $x < 0$ alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\, \mathrm{d}t = 0$.

- si $x \geqslant 0$ alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \lambda\, e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t = \left[-e^{-\lambda\, t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda\, x}$.

  On en déduit que : $P(0 \leqslant X \leqslant t) = F(t) - F(0) = 1 - e^{-\lambda\, t}$

  $P(X > t) = 1 - F(t) = e^{-\lambda\, t}$

  $P(t < X \leqslant t+s) = F(t+s) - F(t) = e^{-\lambda\, t} - e^{-\lambda\,(t+s)}$.

(b) En utilisant la définition d'une probabilité conditionnelle :

$$P_{X>t}(t < X \leqslant t+s) = \frac{P(''t < X \leqslant t+s'' \cap'' X > t'')}{P(X > t)} = \frac{P(t < X \leqslant t+s)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda\, t} - e^{-\lambda\,(t+s)}}{e^{-\lambda\, t}}$$

On trouve donc : $P_{X>t}(t < X \leqslant t+s) = 1 - e^{-\lambda\, s}$ et on constate que c'est la valeur de $F(s)$.
(la loi exponentielle modélise les phénomènes continus de temps d'absence sans mémoire)

2. $P(0 \leqslant X \leqslant m) = P(X > m) \Longleftrightarrow F(m) = 1 - F(m) \Longleftrightarrow F(m) = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow e^{-\lambda\, m} = \dfrac{1}{2} \Longleftrightarrow m = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$.

3. $m = \dfrac{\ln(2)}{\lambda}$ représente la demi-vie d'un élément radioactif. Cela correspond au temps nécessaire à la désintégration de la moitié des noyaux d'un élément radioactif.

Sujet E

Exercice 1

Afin d'étudier le pourcentage de consommateurs satisfaits par le produit A, on a interrogé 100 consommateurs. 56 d'entre eux ont déclaré être satisfaits par A.
Donner un intervalle de confiance de la proportion p de consommateurs satisfaits du produit A avec un niveau de risque de 5%.

Solution

On note p la proportion de consommateurs satisfaits par le produit A. On ne connait pas la valeur de p et on recherche une estimation de p au moyen d'un intervalle de confiance.

On interroge $n = 100$ consommateurs, avec pour chacun d'entre eux, la probabilité p de se déclarer satisfait par le produit A.

Si on note N le nombre de consommateurs satistaits dans un échantillon, N est une variable aléatoire. L'expérience décrite dans l'énoncé a donné comme résultat $N = 56$. Cependant, selon l'échantillon choisi, le résultat peut fluctuer et, en général, N suit une loi binômiale : $N \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$.

– *Estimation ponctuelle de p (non demandée mais c'est un premier pas)*
  Soit alors $F = \dfrac{N}{n}$, la proportion de consommateurs satisfaits dans l'échantillon.
  L'expérience décrite dans l'énoncé a donné comme résultat $F = 0.56 = \hat{p}$.
  En général, F est une variable aléatoire telle que :
  $E(F) = E\left(\dfrac{N}{n}\right) = \dfrac{E(N)}{n} = \dfrac{np}{n} = p$ et $V(F) = V\left(\dfrac{N}{n}\right) = \dfrac{V(N)}{n^2} = \dfrac{np(1-p)}{n^2} = \dfrac{p(1-p)}{n}$.
  On peut raisonnablement penser que, pour une valeur de n assez grande, la valeur ponctuelle $0.56 = \hat{p}$ obtenue dans l'expérience sera proche de la valeur théorique de p recherchée.
– *Construction d'un intervalle de confiance au seuil $\alpha = 0.05$*
  On a $n = 100 \geq 30$ et comme $np \simeq n\hat{p} = 56 \geq 15$ et $np(1-p) \simeq n\hat{p}(1-\hat{p}) = 24,64 \geq 5$
  On peut donc supposer que la loi de N peut être approchée par une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ avec $m = np = 100p$ et $\sigma = \sqrt{np\,(1-p)}$
  Posons alors $T = \dfrac{N-m}{\sigma}$. On sait que T est une variable aléatoire qui suit (environ) la loi normale centrée réduite et on note Φ la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$.
  On sait que $P(-t \leq T \leq t) \geqslant 1 - 0,05 = 0,95$ si et seulement si $2\Phi(t) - 1 \geqslant 0,95$
  Cela correspond à $\Phi(t) \geqslant 0,975$ soit environ $t \geqslant 1,96 = t_\alpha$ d'après le tableau de la loi normale.
  On a donc : $P(-1,96 \leqslant T \leqslant 1,96) \geqslant 0,95$
  et on en déduit successivement que : $P(m - 1,96.\sigma \leqslant N \leqslant m + 1,96.\sigma) \geqslant 0,95$ puis
  $P\left(p - 1,96\dfrac{\sigma}{n} \leqslant F \leqslant p + 1,96\dfrac{\sigma}{n}\right) \geqslant 0,95 \Longleftrightarrow P\left(-1,96\dfrac{\sigma}{n} \leqslant F - p \leqslant 1,96\dfrac{\sigma}{n}\right) \geqslant 0,95$
  $\Longleftrightarrow P\left(-1,96\dfrac{\sigma}{n} \leqslant p - F \leqslant 1,96\dfrac{\sigma}{n}\right) \geqslant 0,95 \Longleftrightarrow P\left(F - 1,96\dfrac{\sigma}{n} \leqslant p \leqslant F + 1,96\dfrac{\sigma}{n}\right) \geqslant 0,95$

On a la formule générale :

$$P\left(F - 1,96.\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant F + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right) \geqslant 0,95$$

Or $\dfrac{\sigma}{n} = \dfrac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \simeq \dfrac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}$ et comme la valeur prise par F est $\hat{p} = 0.56$, on en déduit que $\left[\hat{p} - 1,96.\dfrac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}\ ;\ \hat{p} + 1,96\dfrac{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})}}{\sqrt{n}}\right]$ est un intervalle de confiance de p avec un niveau de risque de 5%.

$$\text{soit ici}\ \ [0,56 - 0,097\ ;\ 0,56 + 0,097] \simeq [0,463\,;\,0,657]\,.$$

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2,\ u_1 = 1,\ u_2 = -1 \\ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n. \end{cases}$$

On se propose de calculer u_n en fonction de n de deux manières différentes.

1. *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = u_{n+1} - 2u_n$.*
   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante et déterminer sa valeur.
   Montrer qu'il existe une constante λ telle que la suite $(u_n - \lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite géométrique.
   En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
2. *Soit A la matrice carrée d'ordre 3 à coefficients réels définie par :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   (a) *Déterminer les valeurs propres de A et les vecteurs propres de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à A relativement à la base canonique de $\mathbb{R}^3$.*

   (b) *La matrice A est-elle diagonalisable ?*

   (c) *Soit*

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   Que vaut $P^{-1}AP$?

   (d) *Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}$, la matrice A^n.*

   (e) *Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose : $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$. Vérifier que l'on a, pour tout n de $\mathbb{N}$:*

$$X_{n+1} = AX_n.$$

   En déduire X_n en fonction de A^n et de X_0, puis retrouver ainsi la valeur de u_n en fonction de n.

Solution

1. On constate que $v_0 = u_1 - 2u_0 = 1 - 2 \times 2 = -3$ et $v_1 = -1 - 2 \times 1 = -3$.
   De la relation $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$, on obtient :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+3} - 2u_{n+2} = u_{n+1} - 2u_n$ soit $v_{n+2} = v_n$.
   On a donc $v_0 = v_2 = v_4 = v_6 = \cdots$ et $v_1 = v_3 = v_5 = \cdots$

La suite des termes de rang pair $(v_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $v_0 = -3$.

La suite des termes de rang impair $(v_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à $v_1 = -3$.

La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante égale à -3.

On a $u_{n+1} - 2u_n = -3$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 2u_n - 3$. On reconnaît là une suite arithmético-géométrique.

On peut appliquer la méthode du point fixe ou bien rechercher directement une constante λ telle que la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_n - \lambda)_{n\in\mathbb{N}}$ soit une suite géométrique :

$t_{n+1} = u_{n+1} - \lambda = 2u_n - 3 - \lambda = 2(t_n + \lambda) - 3 - \lambda = 2t_n + \lambda - 3$.

On choisit $\lambda = 3$ et la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2. On en déduit que $t_n = t_0.2^n = (u_0 - \lambda).2^n = -2^n$

Conclusion $\forall n \in \mathbb{N}\,,\quad u_n = 3 - 2^n$

2. (a) Par définition, il s'agit de trouver des réels λ et des éléments non nuls $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$ tels que $A.X = \lambda X$.

Ceci équivaut successivement à :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} (2-\lambda)x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ x & - & \lambda y & & & = & 0 \\ & & y & - & \lambda z & = & 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcrcr} (2-\lambda)x & + & y & - & 2z & = & 0 \\ & & x & = & \lambda y & = & \lambda^2 z \\ & & & & y & = & \lambda z \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} \left(\lambda^2(2-\lambda) + \lambda - 2\right) z & = & 0 \\ x & = & \lambda^2 z \\ y & = & \lambda z \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} \left(-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2\right) z & = & 0 \\ x & = & \lambda^2 z \\ y & = & \lambda z \end{array}\right.$$

On remarque que $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2 = -(\lambda+1)(\lambda-1)(\lambda-2)$.

(pour factoriser, il suffit de remarquer que $\lambda = 1$ est racine évidente de $-\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$) On sépare les différents cas selon la valeur de λ :

- Si $\lambda \neq -1,\ \lambda \neq 1,\ \lambda \neq 2$ alors la seule solution au système est $X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

  Dans ce cas, λ n'est pas valeur propre de A (on sait qu'un vecteur propre ne doit pas être nul)

- Si $\lambda = \lambda_1 = -1$ alors $A.X = -X$ équivaut à : $\left\{\begin{array}{rcr} 0 & = & 0 \\ x & = & z \\ y & = & -z \end{array}\right.$

  $\lambda_1 = -1$ est valeur propre de A et l'espace propre associé à λ_1 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Si $\lambda = \lambda_2 = 1$ alors $A.X = X$ équivaut à : $\left\{\begin{array}{rcr} 0 & = & 0 \\ x & = & z \\ y & = & z \end{array}\right.$

  $\lambda_2 = 1$ est valeur propre de A et l'espace propre associé à λ_2 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- Si $\lambda = \lambda_3 = 2$ alors $A.X = 2X$ équivaut à : $\left\{\begin{array}{rcr} 0 & = & 0 \\ x & = & 4z \\ y & = & 2z \end{array}\right.$

  $\lambda_3 = 2$ est valeur propre de A et l'espace propre associé à λ_3 est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $u_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

(b) *première version :*

Une droite vectorielle est un espace de dimension 1. La somme des dimensions des espaces propres vaut 3 et A est une matrice carrée d'ordre 3. La matrice A est donc diagonalisable.

deuxième version :

A est un matrice carrée d'ordre 3 ayant 3 valeurs propres distinctes : c'est une condition suffisante pour affirmer que A est diagonalisable.

(c) On peut montrer que P est inversible en vérifiant que son déterminant est non nul : $\det(P) = 6 \neq 0$.

Le calcul de l'inverse de P peut se faire de différentes façons. Par exemple, on peut résoudre le système $Y = P.X$ et la solution obtenue sera $X = P^{-1}.Y$.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 4z & = & a \\ x & - & y & + & 2z & = & b \\ x & + & y & + & z & = & c \end{array}\right. \iff \begin{array}{l} \\ \ell_2 \leftarrow \ell_1 - \ell_2 \\ \ell_3 \leftarrow \ell_1 - \ell_3 \end{array} \left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & 4z & = & a \\ & & 2y & + & 2z & = & a-b \\ & & & & 3z & = & a-c \end{array}\right.$$

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & a - y - 4z \\ 2y & = & a - b - 2z \\ z & = & (a-c)/3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -a/2 + b/2 + c \\ y & = & a/6 - b/2 + c/3 \\ z & = & (a-c)/3 \end{array}\right.$$

On trouve donc $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/6 & -1/2 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}$

On diagonalise la matrice A et on a $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = D$

(d) On sait que $A = P.D.P^{-1}$ et donc $A^n = A \times A \times \cdots \times A = P.D.P^{-1} \times P.D.P^{-1} \times \cdots \times P.D.P^{-1} = P.D^n.P^{-1}$

D étant une matrice diagonale, on a $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$

Et, pour tout n de $\mathbb{N}$, $A^n = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} + \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{4}{3}2^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n & 1 + \frac{1}{3}(-1)^n - \frac{4}{3}2^n \\ \frac{-1}{2} - \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{2}{3}2^n & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(-1)^n & 1 - \frac{1}{3}(-1)^n - \frac{2}{3}2^n \\ \frac{-1}{2} + \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n & \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n & 1 + \frac{1}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}2^n \end{pmatrix}$

(e) Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}.$$

On a bien, pour tout n de $\mathbb{N}$: $X_{n+1} = AX_n$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $X_n = A^n.X_0$.

initialisation : Pour $n = 0$, on a $X_0 = A^0.X_0 = I.X_0$ qui est vérifié.

hérédité : Supposons la relation vérifiée au rang n alors :

$X_{n+1} = A.X_n = A.A^n.X_0 = A^{n+1}.X_0$. Ce qui prouve que la relation est vérifiée aussi au rang $n+1$.

Conclusion : on a montré par récurrence que, pour tout entier n, on a $X_n = A^n.X_0$.

Application ici : $X_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et la dernière ligne du produit matriciel nous donne

$$u_n = -\left(\frac{-1}{2} + \frac{1}{6}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n\right) + 2\left(1 + \frac{1}{3}(-1)^n - \frac{1}{3}2^n\right) = 3 - 2^n$$

Sujet G

Exercice 1

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}} & si\ x \geq 0\,; \\ 0 & si\ x < 0. \end{cases}$$

1. *Montrer que la fonction f peut être considérée comme une densité d'une variable aléatoire X. Construire sa représentation graphique dans un plan rapporté à un repère.*
2. *Déterminer la fonction de répartition F de X.*
3. *Calculer l'espérance de X.*
4. *Calculer les probabilités $P(0 \leq X \leq 4)$, $P(2 \leq X \leq 4)$ et $P(X > 4/X > 2)$.*

Solution

1. Montrons que la fonction f peut être considérée comme une densité d'une variable aléatoire X :
   - étude de la continuité de f :
     f est continue sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues.
     f est continue en 0 car $\lim\limits_{x\to 0\ ,\ x<0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0\ ,\ x<0} 0 = 0 = \lim\limits_{x\to 0\ ,\ x\geqslant 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0\ ,\ x\geqslant 0} \dfrac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}$
     Conclusion f est continue sur $\mathbb{R}$.
   - f est une fonction positive ou nulle.
   - Vérifions enfin que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$: D'une part $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x = 0$
     D'autre part $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ se calcule comme étant la limite quant y tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^y \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$.
     On effectue une intégration par parties avec : $\begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{2} e^{-\frac{x}{2}} & u(x) = e^{-\frac{x}{2}} \\ v(x) = -\frac{1}{2} x & v'(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$
     $$\begin{aligned} \int_0^y \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^y u'(x)\,v(x)\,dx &= \Big[\ u(x)\,v(x)\ \Big]_0^y - \int_0^y u(x)\,v'(x)\,dx \\ &= \Big[\ -\tfrac{1}{2} x e^{-\frac{x}{2}}\ \Big]_0^y + \frac{1}{2}\int_0^y e^{-\frac{x}{2}}\,dx \\ &= -\frac{1}{2} y e^{-\frac{y}{2}} + 0 + \Big[\ -e^{-\frac{x}{2}}\ \Big]_0^y = 1 - \left(1 + \frac{y}{2}\right) e^{-\frac{y}{2}} \end{aligned}$$
     On trouve alors $\displaystyle\lim_{y\to+\infty} \int_0^y \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = 1$ et on a bien $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$.

   Etude de la fonction f :
   Sur $]-\infty, 0]$, $f(x) = 0$ et sur $[0, +\infty[$, $f(x) = \frac{1}{4} x e^{-\frac{x}{2}}$. La fonction est continue sur $\mathbb{R}$.
   La dérivée de f est nulle sur $]-\infty, 0[$.
   Le calcul de la dérivée sur $]0, +\infty[$ donne $f'(x) = \dfrac{1}{8}(2 - x)e^{-\frac{x}{2}}$.
   La fonction f croissante sur $[0, 2]$ puis décroissante sur $[2, +\infty[$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. L'axe des abscisses est asymptote à la courbe de f au voisinage de $+\infty$.
   On remarque que f n'est pas dérivable en 0 : f admet une dérivée à gauche $f'_g(0) = 0$ et une dérivée à droite $f'_d(0) = \dfrac{1}{4}$ qui ne sont pas égales (on a un point anguleux).
   Justification : $\displaystyle\lim_{x\to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 = f'_g(0)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{4} e^{-\frac{x}{2}} = \frac{1}{4} = f'_d(0)$

2. Soit F la fonction de répartition F de X. On sait que pour tout réel x, on a $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
   Deux cas se présentent :
   - Si $x < 0$ alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.

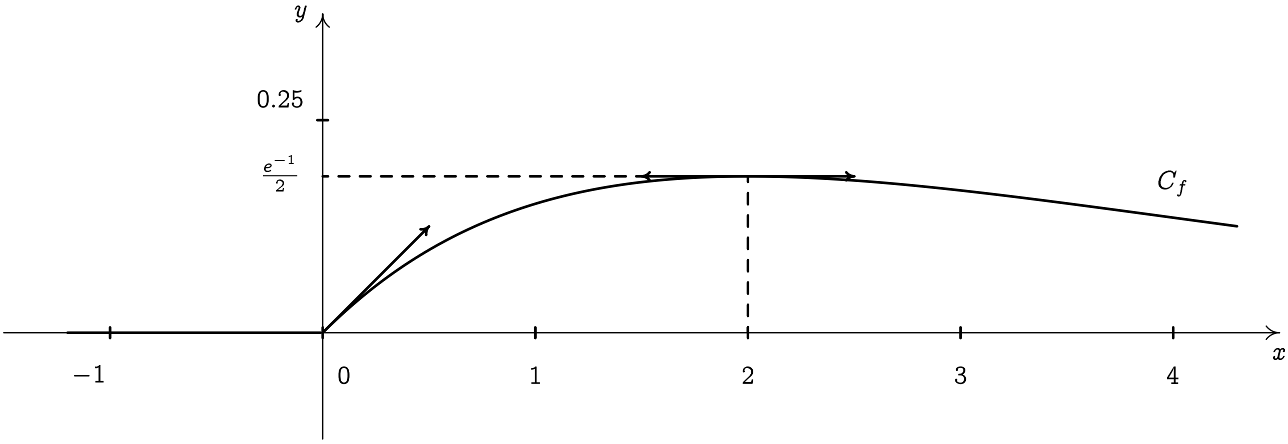

FIG. 4 – graphe de la fonction f

- Si $x \geqslant 0$ alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = 1 - \left(1 + \frac{x}{2}\right) e^{-\frac{x}{2}}$ d'après la question précédente.

3. Calculons l'espérance de X qui est définie, sous réserve de convergence, par $E(X) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$.

   D'une part $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x = 0$

   D'autre part $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ se calcule comme étant la limite quant y tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^y \frac{1}{4}x^2 e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$.

   On effectue une intégration par parties avec : $\begin{cases} u'(x) = -\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}} & u(x) = e^{-\frac{x}{2}} \\ v(x) = -\frac{1}{2}x^2 & v'(x) = -x \end{cases}$

$$\begin{aligned} \int_0^y \frac{1}{4}x^2 e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \int_0^y u'(x)\,v(x)\,dx &= \Big[\ u(x)\,v(x)\ \Big]_0^y - \int_0^y u(x)\,v'(x)\,dx \\ &= \Big[\ -\tfrac{1}{2}x^2 e^{-\frac{x}{2}}\ \Big]_0^y + \int_0^y x e^{-\frac{x}{2}}\,dx = -\frac{1}{2}y^2 e^{-\frac{y}{2}} + 4F(y) \end{aligned}$$

   On trouve alors $\displaystyle\lim_{y \to +\infty} \int_0^y \frac{1}{4}x^2 e^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = 4$ et on a $E(X) = 4$.

4. - $P(0 \leqslant X \leqslant 4) = F(4) - F(0) = F(4) = 1 - 3e^{-2} \simeq 0,59$
   - $P(2 \leqslant X \leqslant 4) = F(4) - F(2) = 2e^{-1} - 3e^{-2} \simeq 0,33$
   - $P(X > 4/X > 2) = \dfrac{P(X > 4 \cap X > 2)}{P(X > 2)} = \dfrac{P(X > 4)}{P(X > 2)} = \dfrac{1 - F(4)}{1 - F(2)} = \dfrac{3e^{-2}}{2e^{-1}} = \dfrac{3}{2}e^{-1} \simeq 0,55.$

Exercice 2

On considère les deux matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Déterminer les valeurs propres de A et B. En déduire que ces deux matrices sont diagonalisables et qu'il existe une matrice inversible R de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $B = R^{-1}AR$.

Solution

- Les valeurs propres de A sont les racines du polynôme caractéristique qui vaut $\mathrm{Det}(A - \lambda.I)$. On développe ce déterminant par rapport à la troisième colonne :

Soit $P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

A admet trois valeurs propres qui sont $\lambda = 0\,,\ \lambda = 1$ et $\lambda = 2$.

- Les valeurs propres de B sont les racines du polynôme caractéristique qui vaut $\mathrm{Det}(B - \lambda.I)$. On développe ce déterminant par rapport à la première colonne :

  Soit $P_B(\lambda) = \begin{vmatrix} -\lambda & 3 & -1 \\ 0 & 3-\lambda & -2 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda\left(\lambda^2 - 3\lambda + 2\right) = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)$

  B admet trois valeurs propres qui sont $\lambda = 0\,,\ \lambda = 1$ et $\lambda = 2$. On remarque que A et B ont les mêmes valeurs propres.
- A et B sont deux matrices carrées d'ordre 3 qui admettent trois valeurs propres distinctes : elle sont donc diagonalisables.
- Il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}.A.P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

  Il existe une matrice Q inversible telle que $Q^{-1}.B.Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

  De la relation $P^{-1}.A.P = Q^{-1}.B.Q$, on en déduit que $A = P.Q^{-1}.B.Q.P^{-1} = (Q.P^{-1})^{-1}.B.Q.P^{-1}$.

  Si on pose $R = Q.P^{-1}$, on a $A = R^{-1}.B.R$.

Remarque : l'énoncé ne nous impose pas de calculer la matrice R

Sujet H

Exercice 1

n désigne un entier naturel non nul.

Une boîte contient trois pièces de monnaie équilibrées. Deux d'entre elles possèdent un côte pile et un côte face et la troisième deux côtés face. On extrait au hasard une pièce de la boîte et on effectue ensuite n lancers successifs de cette pièce.

1. *Quelle est la probabilité d'obtenir face lors du premier lancer ?*
2. *Quelle est la probabilité de l'événement : "on n'obtient que des faces au cours des n premiers lancers".*
3. *Sachant que l'on n'a obtenu que des faces au cours des n lancers, quelle est la probabilité d'avoir extrait la pièce avec deux côtés face ? On note p_n cette probabilité. Quelle est la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$?*
4. *On note X la variable aléatoire égale aux nombre de fois où la pièce a donné "face" lors des n lancers. Déterminer la loi de X.*

Solution

L'expérience se déroule en deux temps : on extrait une pièce de la boîte puis ensuite on effectue n lancers successifs de cette pièce.

On définit les événements (n et k sont des entiers naturels non nuls) :

- A : "on choisit une pièce équilibrée".
- $\overline{A}$: "on choisit la pièce ayant deux côtés « face »".
- F_k : "on obtient « face »lors du k-ième lancer".
- $R_n = F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n$:"on n'obtient que des faces lors des n lancers".

1. En appliquant la formule des probabilités totales :

$$P(F_1) = P(A).P_A(F_1) + P(\overline{A}).P_{\overline{A}}(F_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times 1 = \frac{2}{3}$$

2. On va appliquer la formule des probabilités totales :$P(R_n) = P(A).P_A(R_n) + P(\overline{A}).P_{\overline{A}}(R_n)$

   Or, sachant qu'on lance une pièce équilibrée : $P_A(R_n) = P_A(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \cdots \times \frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

et sachant qu'on lance la pièce ayant deux côtés « face » : $P_{\overline{A}}(R_n) = P_{\overline{A}}(F_1 \cap F_2 \cap \cdots \cap F_n) = 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = 1$
On en déduit que

$$P(R_n) = P(A).P_A(R_n) + P(\overline{A}).P_{\overline{A}}(R_n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$$

3. $p_n = P_{R_n}(\overline{A}) = \dfrac{P(R_n \cap \overline{A})}{P(R_n)} = \dfrac{P(\overline{A})P_{\overline{A}}(R_n)}{P(R_n)} = \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1}$

   On sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 1$.
4. L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = [[0, n]] = \{0, 1, \ldots, n\}$.
   Il faut déterminer $P(X = k)$, pour chaque valeur de k comprise entre 0 et n.
   On va appliquer la formule des probabilités totales :$P(X = k) = P(A).P_A(X = k) + P(\overline{A}).P_{\overline{A}}(X = k)$ et deux cas sont possibles :
   - si $0 \leqslant k < n$ alors $P_{\overline{A}}(X = k) = 0$ (on lance la pièce qui a deux côtés "face")
     et $P_A(X = k) = C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$ car on est en présence d'une loi binômiale.
     Dans ces conditions $P(X = k) = P(A).P_A(X = k) + P(\overline{A}).P_{\overline{A}}(X = k) = \frac{2}{3} \times C_n^k \left(\frac{1}{2}\right)^n$
   - si $k = n$ alors $P_{\overline{A}}(X = n) = 1$ (on lance la pièce qui a deux côtés "face")
     et $P_A(X = n) = C_n^n \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$
     Dans ces conditions $P(X = n) = P(A).P_A(X = n) + P(\overline{A}).P_{\overline{A}}(X = n) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}$

Exercice 2

1. *Etudier les variations de la fonction f définie sur $]-\infty, 0[$ par $f(t) = \exp(t) + t \,.\, \exp\left(\frac{1}{t}\right)$ (où* $\exp$ *désigne la fonction exponentielle).*
   En déduire que l'équation $f(t) = 0$ admet une unique solution dans $]-\infty, 0[$.
2. *Soit g la fonction définie sur $]-\infty, +\infty[\times]-\infty, +\infty[$ par $g(x, y) = xe^y + ye^x$*
   (a) *Montrer que si g admet un extremum local au point (x, y) alors $y = \frac{1}{x}$*
   (b) *Utiliser la question 1. pour étudier l'existence d'extremums de g.*

Solution

1. f est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et $f'(t) = e^t + e^{\frac{1}{t}} - \frac{1}{t}e^{\frac{1}{t}}$.
   Or, pour $t < 0$, $-\frac{1}{t} > 0$ et sachant qu'une exponentielle est toujours positive : $e^t > 0$, $e^{\frac{1}{t}} > 0$, $-\frac{1}{t}e^{\frac{1}{t}} > 0$
   La somme de ces trois termes positifs donne un résultat positif : $\forall t < 0$, $f'(t) > 0$.
   Pour les limites aux bornes : d'une part, $\lim\limits_{t \to -\infty} e^t + te^{\frac{1}{t}} = -\infty$
   d'autre part, $\lim\limits_{t \to 0^-} e^t + te^{\frac{1}{t}} = 1$ (car avec $t = \frac{1}{x}$ on a $\lim\limits_{t \to 0^-} te^{\frac{1}{t}} = \lim\limits_{t \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$)
   Le tableau de variation de f est le suivant :

t	$-\infty$	-1	0
f'		$+$	
f	$-\infty$ $\nearrow$	0	$\nearrow$ 1

Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, la fonction f est strictement croissante continue, elle réalise donc une bijection de l'intervalle $]-\infty, 0[$ sur l'intervalle image $]-\infty, 1[$ (d'après les limites aux bornes).
Or, 0 appartient à l'intervalle image, il admet donc un unique antécédent par f.

Il existe donc une unique solution à l'équation $f(x) = 0$ dans l'intervalle $]-\infty, 0[$. On constate que cette solution est $x = -1$.

2. Calculons les dérivées premières de g :

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = e^y + y\,e^x \quad \text{et} \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = x\,e^y + e^x$$

Cherchons les éventuels points critiques

$$\left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial g}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \dfrac{\partial g}{\partial y}(x,y) = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} e^y + y\,e^x = 0 \\ x\,e^y + e^x = 0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y = -\dfrac{e^y}{e^x} \\ x = -\dfrac{e^x}{e^y} = \dfrac{1}{y} \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} e^y + ye^{\frac{1}{y}} = 0 = f(y) \\ x = \dfrac{1}{y} \end{array}\right.$$

x et y sont nécessairement de même signe (car $x = \frac{1}{y}$) et lorsque x et y sont positifs, il n'est pas possible d'avoir $e^y + ye^{\frac{1}{y}} = 0$ (une exponentielle est positive)
Lorsque x et y sont négatifs, d'après la question précédente, le seul cas possible est $y = -1 = x$.
Si g admet un extremum local alors $(x,y) = (-1,-1)$.
Etudions les dérivées secondes de g au point critique :

$$r = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = ye^x = -e^{-1}\ , \quad s = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = e^y + e^x = 2e^{-1} \quad \text{et} \quad t = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = xe^y = -e^{-1}$$

La condition $rt - s^2 < 0$ nous permet de conclure que le seul point critique de g n'est pas un extremum local.
g n'admet aucun extremum local

Sujet M

Exercice 1

Partie A

Au cours d'une demi-journée, un commercial se déplace pour visiter deux de ses clients afin de leur proposer l'achat d'un produit P de grande consommation d'une valeur de 500 euros.
Au vu de son expérience le commercial estime que :
- *la probabilité que le premier client visité achète le produit est égale à $0,25$;*
- *si le premier client achète le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à $0,4$;*
- *si le premier client n'achète pas le produit, la probabilité que le second client visité achète le produit est égale à $0,25$.*

1. *On note A l'événement : le premier client achète le produit P. On note B l'événement : le deuxième client achète le produit P.*
   Calculer la probabilité de l'événement B.
2. *Quelle est la probabilité qu'un seul des clients conclue l'achat ?*
3. *Le commercial perçoit 15% sur le total de sa vente.*
   (a) *Etablir la loi de probabilité associée au gain de la demi-journée.*
   (b) *Quelle est l'espérance mathématique du gain ?*
4. *Que doit être le pourcentage de sa commission pour que cette espérance dépasse 60 euros ? (on donnera le résultat arrondi au dixième).*

Partie B

Une étude faite sur 400 demi-journées où le premier client avait acheté le produit, la fréquence d'achat du produit par le second client était de 0,4. déterminer un intervalle de confiance de la probabilité que le second client visité achète le produit sachant que le premier l'a acheté.

Solution

Partie A

1. D'après le texte nous avons :

$$P(A) = 0.25 \quad , \quad P_A(B) = 0.4 = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \text{et} \quad P_{\overline{A}}(B) = 0.25 = \frac{P(\overline{A} \cap B)}{P(\overline{A})}$$

On en déduit donc, à l'aide de la formule des probabilités totales, que

$$\begin{aligned} P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B) &= P(A) \times P_A(B) + P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(B) \\ &= 0.25 \times 0.4 + 0.75 \times 0.25 = 0.2875 \end{aligned}$$

Une autre possibilité consisterait à représenter les données sous forme d'un arbre.

2. La probalité p cherchée est égale à :

$$p = P(A \cup \overline{B}) + P(\overline{A} \cap B) = 0.6 \times 0.25 + 0.25 \times 0.75 = 0.3375$$

3. On note X la variable aléatoires égale aux gains. Les gains possibles sont (en euros) 0, 75 ou 150. On obtient donc comme ensemble des valeurs prises par X :

$$X(\Omega) = \{0, 75, 150\}$$

Il faut ensuite calculer les probabilités $P(X = 0)$; $P(X = 75)$ et $P(X = 150)$:
- $P(X = 0) = P(\overline{A} \cap \overline{B}) = 0.75 \times 0.75 = 0.5625$
- $P(X = 75) = p = 0.3375$
- $P(X = 150) = P(A \cap B) = 0.250 \times 4 = 0.1$

On en déduit que

$$E(X) = 0 \times 0.5625 + 75 \times 0.3375 + 150 \times 0.1 = 40.3125$$

4. Si l'on note y le pourcentage de la commission, les gains possibles sont en euros $0, 500\,y$ ou $1000\,y$.
On a donc $E(X) = 500\,y \times 0.3375 + 1000y \times 0.1$

D'où $E(X) \geqslant 60 \iff 500\,y \times 0.3375 + 1000y \times 0.1 \geqslant 60$ soit y est au minimum de 22.4%

Partie B

Notons p la probabilité que le second client achète le produit sachant que le premier ne l'achète pas.
Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où le second client achète le produit sachant que le premier ne l'achète pas sur les 400 demi-journées considérées. Il s'agit de compter le nombre de "succès" lors de $n = 400$ expériences identiques et indépendantes à deux issues (avec la probabilité du "succès" égale à p).
Donc X suit la loi binomiale $\mathcal{B}(400, p)$.

Les conditions sont réunies pour approximer cette loi binomiale par la loi normale de paramètres $m = 400\,p$ et $\sigma = \sqrt{400\,p\,(1-p)}$
Posons $T = \dfrac{X - m}{\sigma}$, T suit la loi normale centrée réduite.
Nous avons $P(-a \leqslant T \leqslant a) = 0.95 \iff 2P(T \leqslant a) - 1 = 0.95$ soit $P(T \leqslant a) = 0.975$ soit $a \simeq 1.96$
d'où dans 95% des cas $-1.96 \leqslant \dfrac{X - m}{\sigma} \leqslant 1.96$ ce qui nous donne $X - 1.96\sigma \leqslant m \leqslant X + 1.96\sigma$
soit $-1.96\sigma + X \leqslant 400p \leqslant X + 1.96\sigma$

Sur notre échantillon $X = 400 \times 0.4 = 160$. Par contre, σ est inconnu. Il faut donc l'estimer en remplaçant p par 0.4. Cette estimation entraine normalement un léger correctif dont on ne tiendra pas compte ici car n est grand.
Reste à faire le calcul et à conclure : l'intervalle cherché est $[0.352; 0.448]$.
Remarque : Refaites l'exercice en travaillant non pas avec la variable X mais la variable $X_1 = \dfrac{X}{400}$.

Exercice 2

On note Y_n, C_n et I_n le revenu, la consommation et l'investissement de l'année n. Les suites Y_n, C_n et I_n vérifient les relations suivantes, pour tout entier n non nul :

- $Y_n = C_n + I_n$
- $C_n = 0.4Y_n + 1000$
- $I_n = 0.3Y_{n-1} + 500$

1. *On donne $Y_1 = 4500$. calculer C_1 et I_1.*
2. *Déterminer une relation entre Y_n et Y_{n+1} valable pour tout entier n non nul.*
3. *Etudier la suite Y_n. Déterminer l'expression de Y_n en fonction de n, en déduire celle de I_n et C_n puis étudier la convergence de ces trois suites.*

Solution

1. Pour le calcul de C et I_1, il suffit de remplacer dans les formules données.
   On trouve : $C_1 = 2800$ et $I_1 = Y_1 - C_1 = 1700$.
2. Nous avons : $C_{n+1} = 0.4Y_{n+1} + 1000$, $Y_{n+1} = C_{n+1} + I_{n+1}$ et $I_{n+1} = 0.3Y_n + 500$ ce qui permet en remplaçant dans la seconde égalité d'obtenir :
   $Y_{n+1} = 0.4Y_{n+1} + 1000 + 0.3Y_n + 500$ soit en simplifiant $0.6Y_{n+1} = 0.3Y_n + 1500$ et donc :
   $$Y_{n+1} = 0.5Y_n + 2500$$
3. (Y_n) est donc une suite arithmético-géométrique.
   Pour étudier une telle suite, on détermine le réel ℓ vérifiant $\ell = 0.5\ell + 2500$ soit $\ell = 5000$. La suite (U_n) définie par $U_n = Y_n - 5000$ est une suite géométrique de raison 0.5 et de premier terme $U_1 = -500$. Vérifions le :
   $U_{n+1} = Y_{n+1} - 5000 = 0.5Y_n + 2500 - 5000 = 0.5Y_n - 2500 = 0.5(Y_n - 5000) = 0.5U_n$.
   On en déduit donc que pour tout entier n non nul : $U_n = (0.5)^{n-1}U_1$ d'où
   $$Y_n = 5000 - (0.5)^{n-1}500$$
   On constate que la suite (Y_n) converge vers 5000. L'étude des deux autres suites en découle immédiatement :
   De la relation $C_n = 0.4Y_n + 1000$, on en déduit que la suite (C_n) converge vers 3000 et de la relation $I_n + C_n = Y_n$ on en déduit que la suite (I_n) converge vers 2000.

Sujet N

Exercice 1

On estime qu'il y a rupture de stock dans les forets qui équipent les machines d'un atelier s'il y a moins de 200 forets utilisables en stock. On estime que la probabilité pour qu'un foret soit défectueux est $p = 0.04$.

1. *On suppose que le stock est de 250 forets. On note Z le nombre de forets défectueux. Quelle est la loi suivie par Z ? Calculer $P(Z = 2)$ puis $P(Z > 4)$.*
2. *Soit X le nombre de forets utilisables, et N l'effectif du stock constitué. Quelle est la loi suivie par X ?*
3. *On cherche à déterminer la valeur minimale de N pour que la probabilité d'avoir en stock au moins 200 forets utilisables soit supérieure à 0.99*
   (a) *Traduire l'énoncé.*
   (b) *Peut-on approcher la loi de X par une loi de Poisson ?*
   (c) *On décide d'utiliser une nouvelle variable : $Y = N - X$, nombre de forets défectueux :*
      - *Compléter $X \geqslant 200 \Longleftrightarrow Y \ldots$*
      - *Quelle est la loi suivie par Y ? Peut-on approcher cette loi par une loi de Poisson ? A quelles conditions ?*
4. *Soit la loi de Poisson $P(\lambda)$. Exprimer λ en fonction de N. Déterminer la valeur minimale de N qui répondra aux exigences. (On procédera par approximations successives).*

Solution

1. Z compte de nombre de forets défecteux : sur un nombre global de 250 foret, chaque foret a une probabilité $p = 0.04$ d'être défecteux. Z suit une loi binômiale : $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(250; 0.04)$.
   On applique la formule : $P(Z = k) = C_{250}^{k}(0.04)^{k}(0.96)^{250-k}$
   - $P(Z = 2) = C_{250}^{2}(0.04)^{2}(0.96)^{248} \simeq 0.002$
   - $P(Z > 4) = 1 - P(Z \leqslant 4) = 1 - [P(Z = 0) + P(Z = 1) + P(Z = 2) + P(Z = 3)] \simeq 0.99$
2. X compte de nombre de forets utilisables : sur un nombre global de N foret, chaque foret a une probabilité $p = 0.96$ d'être utilisable. X suit une loi binômiale : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(N; 0.04)$.
3. (a) On recherche la valeur de N minimale, telle que $P(X \geqslant 200) \geqslant 0.99$
   (b) Les trois conditions habituellement retenues sont : $N \geqslant 30$, $Np \leqslant 15$ et $p \leqslant 0.1$.
   Dans le cas présent , $p = 0.96$ ne vérifie pas la dernière inégalité.
   On ne peut pas approcher la loi de X par une loi de Poisson.
   (c) On décide d'utiliser la variable aléatoire $Y = N - X$.
   - $X \geqslant 200 \iff N - Y \geqslant 200 \iff Y \leqslant N - 200$
   - Y compte de nombre de forets défecteux : sur un nombre global de N foret, chaque foret a une probabilité $p = 0.04$ d'être défecteux. Y suit une loi binômiale : $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(N; 0.04)$.
     On peut approcher la loi de Y par une loi de Poisson avec :
     $N \geqslant 30$ (ce qui est vérifié car de toute évidence, on prend $N \geqslant 200$)
     $p = 0.04 \leqslant 0.1$
     $Np \leqslant 15 \iff N \leqslant 350$ ("intuitivement" avec $N = 350$ et $p = 0.04$ il parait quasi-probable qu'il y aura bien plus de 200 foret valide)
4. On a $\lambda = N \times 0.04$. On note F_λ la fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre λ et on recherche k tel que $F_\lambda(k) = P(Y \leqslant N - 200) \geqslant 0.99$.
   Première approximation : On suppose, intuitivement, que $N = 250$.
   Dans ce cas $\lambda = 10$ et, à la lecture de la table de la fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre 10, on obtient : $F_{10}(k) \geqslant 0.99 \iff k \geqslant 18$.
   On en déduit alors que $N - 200 \geqslant 18$ soit $N \geqslant 218$.
   Deuxième approximation : On suppose que $N = 220$.
   Dans ce cas $\lambda = 8.8$, on hésite donc entre $\lambda = 8$ et $\lambda = 9$.
   On obtient, à la lecture de la table : $F_8(k) \geqslant 0.99 \iff k \geqslant 15$ et $F_9(k) \geqslant 0.99 \iff k \geqslant 17$.

   Par principe de précaution, on décide de prendre $k = 17$, et $\boxed{N = 217}$

Exercice 2

Un consommateur achète deux biens A et B de consommation courante en quantités respectives x et y. On évalue les préférences du consommateur par la fonction f, appelée fonction de satisfaction, définie par $f(x, y) = x^{1/2}y^{2/3}$ avec x et y strictement positifs.
On appelle courbe d'indifférence l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan muni d'un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ tels que $f(x, y) = k$ où k est une constante positive donnée ; k correspond à un niveau de satisfaction du consommateur.

1. *Représenter la courbe d'indifférence pour $k = 100$.*
2. *Le consommateur dispose d'un budget de 140 euros pour l'achat des biens A et B, somme qu'il dépensera en totalité. Les prix unitaires des biens A et B sont respectivement de 1.2 euros et 2 euros.*
   (a) Ecrire la contrainte liée au budget.
   (b) En déduire que la satisfaction du consommateur peut s'écrire sous la forme d'une fonction z dépendant de x que l'on déterminera.
   (c) Déterminer la valeur maximisant la satisfaction du consommateur.

Solution

1. Courbe demandée :

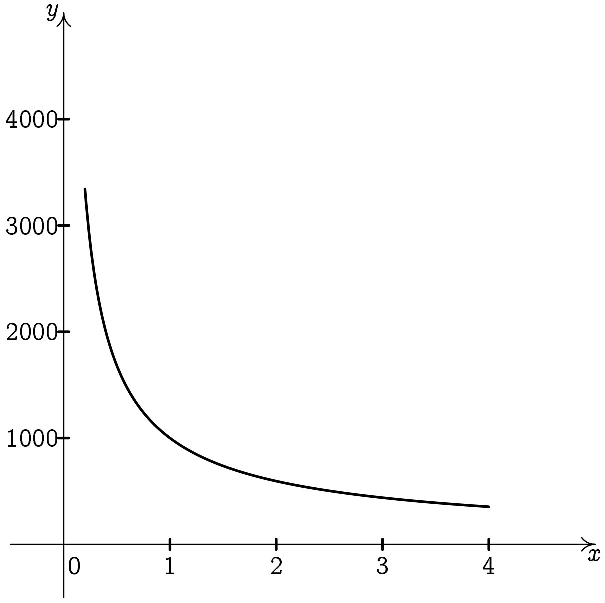

FIG. 5 – courbe d'indifférence pour $k = 100$

2. (a) La contrainte liée au budget est $x \times 1.2 + y \times 2 = 140$

   (b) De cette contrainte, on en déduit une expression de y en fonction de x : $y = 70 - 0.6 \times x$
   Que l'on remplace dans la fonction donnée $f(x, y) = x^{1/2}y^{2/3} = x^{1/2}(70 - 0.6 \times x)^{2/3} = z(x)$

   (c) On dérive la fonction z :
   $z'(x) = -\frac{1}{2}x^{-1/2}(70 - 0.6 \times x)^{2/3} - \frac{2}{3} \times 0.6 \times x^{1/2}(70 - 0.6 \times x)^{-1/3}$
   Et avec une factorisation, on trouve :
   $z'(x) = x^{-1/2}(70 - 0.6 \times x)^{-1/3}\left[\frac{1}{2}(70 - 0.6\,x) - \frac{2}{3} \times 0.6 \times x\right] = x^{-1/2}(70 - 0.6 \times x)^{-1/3}\,[35 - 0.7\,x]$
   On remarque que lorsque $0 < x < 50$, on a $35 - 0.7\,x > 0$ et la fonction z est croissante.
   par contre, lorsque $x > 50$, on a $35 - 0.7\,x < 0$ et la fonction z est décroissante.
   le maximum recherché correspond à la valeur de $x_{max} = 50$. La valeur de $y_{max} = 70 - 0.6\,x = 40$ et $f_{maxi} = f(x_{max}, y_{max}) = 50^{1/2}40^{2/3} \simeq 82.70$

Sujet O

Exercice 1

Partie 1

On a établi, pour une certaine population d'individus, que le taux de cholestérol séreux est distribué normalement de moyenne 200 mg par 100 cc avec un écart type de 25 mg par 100 cc.

1. *Si on considère qu'un taux normal de cholestérol doit se situer entre 175 mg et 225 mg, quelle proportion de la population se situe dans cet intervalle ?*
2. *La plupart des autorités médicales considèrent comme élevé un taux de cholestérol séreux qui dépasse 250 mg par 100 cc. Combien d'individus sur 10 000 sont dans cette situation ?*
3. *On considère qu'un taux de cholestérol séreux anormalement élevé peut influencer le développement de maladies cardiovasculaires. Si on classe comme "risque élevé" un taux de cholestérol séreux supérieur à 270 mg par 100cc, quelle proportion d'individus pourrait correspondre à cette classification ?*
4. *On admet que 1,5% de cette population est en danger. Quelle est la probabilité pour que dans une famille de trente personnes au moins deux personnes soient en danger.*

Partie 2

Sur un groupe d'individus de 225 personnes, on a mesuré le taux de cholestérol séreux. La moyenne observée est de 206 mg par 100 cc avec un écart type de 24.8 mg par 100 cc. Déterminer un intervalle de confiance du taux de cholestérol séreux de la population dont est issu ce groupe de personnes.

Solution

Partie 1

1. On considère la variable aléatoire T qui mesure le taux de cholestérol séreux d'un individu. Cette variable aléatoire suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma)$ et, selon les données du texte $m = 200$ et $\sigma = 25$ (unité :mg par 100 cc). On recherche $P(175 \leqslant T \leqslant 225)$.
   On sait que tout calcul sur une loi normale se ramène à un calcul sur la loi normale centré réduite car, par propriété, $T^* = \dfrac{T-m}{\sigma}$ est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$ (dont on note Φ la fonction de répartition).
   Ici, $P(175 \leqslant T \leqslant 225) = P\left(\dfrac{175-200}{25} \leqslant T^* \leqslant \dfrac{225-200}{25}\right) = P(-1 \leqslant T^* \leqslant 1) = 2\Phi(1) - 1 \simeq 0,682$.
   ...après lecture de la table de la loi normale centrée réduite.
2. $P(T \geqslant 250) = P(T^* \geqslant 2) = 1 - \Phi(2) \simeq 0,02275$
   Ce qui, rapporté à 10 000 personnes donne environ 227 ou 228 personnes ayant un taux de cholestérol séreux qui dépasse 250 mg par 100 cc.
3. $P(T \geqslant 270) = P(T^* \geqslant 2,8) = 1 - \Phi(2,8) \simeq 0,00256$
   La proportion d'individus correspondant à un taux de cholestérol séreux anormalement élevé (supérieur à 270 mg par 100cc), est de $0,256\%$
4. On change de variable aléatoire !
   Sur un total de $n = 30$ personnes, on appelle N, la variable aléatoire égale au nombre de personnes en danger.
   Chaque personne a la probabilité $p = 1,5\%$ d'être en danger.
   On a donc $N \hookrightarrow \mathcal{N}(30 : 0,015)$ et $P(N \geqslant 2) = 1 - P(n < 2) = 1 - P(N=0) - P(N=1) = 1 - (0.985)^{30} - C_{30}^{1}(0.015)^1 0.985)^{29} \simeq 0,074$

Partie 2 Effectuons une estimation au niveau de risque 5% et déterminons un intervalle de confiance du taux de cholestérol séreux de la population dont est issu ce groupe de personnes.
la moyenne relevée est $\widehat{m} = 206$, l'écart-type $\sigma = 24.8$, le nombre de personnes $n = 225$ soit $\sqrt{n} = 15$.

Selon un raisonnement similaire à celui détaillé dans le **sujet E**, on trouve comme intervalle de confiance :

$$\left[\widehat{m} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\,;\, \widehat{m} - t_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$$

où $t_\alpha = 1,96$ correspond à la valeur telle que $2\Phi(t_\alpha) - 1 \geqslant 0,95$.
Application numérique :

$$[202,75\,;\, 209,25]$$

Exercice 2

Déterminer les valeurs propres et les expaces propres associés.

$$A = \begin{pmatrix} 15 & -2 & 6 \\ 21 & -2 & 9 \\ -28 & 4 & -11 \end{pmatrix}$$

En déduire A^n pour tout n entier non nul.

Solution

Déterminons les valeurs propres de A.

Le polynôme caractéristique est $P(\lambda) = Det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 15-\lambda & -2 & 6 \\ 21 & -2-\lambda & 9 \\ -28 & 4 & -11-\lambda \end{vmatrix}$

En effectuant l'opération $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$:

$P(\lambda) = \begin{vmatrix} 15-\lambda & -2 & 6 \\ 21 & -2-\lambda & 9 \\ 2-2\lambda & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 15-\lambda & -2 & 6 \\ 21 & -2-\lambda & 9 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

En effectuant l'opération $C_1 \leftarrow C_1 - 2C_3$:

$P(\lambda) = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 & 6 \\ 3 & -2-\lambda & 9 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1-\lambda) \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)\left[(3-\lambda)(-2-\lambda)+6\right] = (1-\lambda)\left[\lambda^2 - \lambda\right]$

Donc $P(\lambda) = -\lambda(\lambda-1)^2$. Les valeurs propres de A sont $\lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 1$.

- espace propre associé à $\lambda_1 = 0$ On résout $A.X = \lambda_1.X = (0)$:

  $\begin{cases} 15x - 2y + 6z = 0 \\ 21x - 2y + 9z = 0 \\ -28x + 4y - 11z = 0 \end{cases} \iff L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \begin{cases} 15x - 2y + 6z = 0 \\ 21x - 2y + 9z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \\ z = -2x \end{cases} \iff \begin{cases} 3x = 2y \\ z = -2x \end{cases}$

  L'espace propre associé à la valeur propre $\lambda_1 = 0$ est la droite vectorielle engendrée par le vecteur $v_1 = (2, 3, -4)$.
  $E_0 = Vect((2, 3, -4))$
- espace propre associé à $\lambda_2 = 1$ On résout $A.X = \lambda_2.X = (0) \iff (A - I).X = (0)$:

  $\begin{cases} 14x - 2y + 6z = 0 \\ 21x - 3y + 9z = 0 \\ -28x + 4y - 12z = 0 \end{cases} \iff 7x - y + 3z = 0$

  L'espace obtenu est un plan vectoriel qu'on notera E_1 (un espace de dimension 2). Pour en déterminer une base, il suffit de choisir deux vecteurs non colinéaires de ce plan ou bien de procéder de la manière suivante :
  $(x, y, z) \in E_1 \iff y = 3z + 7x \iff (x, y, z) = (x, 3z + 7x, z) = x(1, 7, 0) + z(0, 3, 1)$
  En posant $v_2 = (1, 7, 0)$ et $v_3 = (0, 3, 1)$ on a (v_2, v_3) base du plan E_1.

$\dim(E_0) + \dim(E_1) = 1 + 2 = 3$ et A est une matrice d'ordre 3, donc A est diagonalisable. Plus précisément en choisissant

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 7 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Il est facile de s'assurer que P est inversible (det(P)= ?) et on a $P^{-1}.A.P = D \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Pour tout entier naturel non nul n, on a $D^n = D$. On en déduit donc que $A^n = P.D^n.P^{-1} = P.D.P^{-1} = A$.