Agrégation interne de Sciences économiques et sociales - Session 2008
Épreuve de Mathématiques - sujet A

Exercice 1

Une société de location de voitures possède trois agences, une à Rennes, une à Lyon, une à Marseille. Lorsqu'un client loue une voiture, un jour donné, dans une des trois villes, il la restitue le jour même dans une des trois agences. On suppose qu'une voiture donnée n'est louée qu'une seule fois dans la journée.
Une étude statistique a permis de montrer que, pour une voiture donnée :

– si elle est louée à Rennes un certain jour, alors elle est laissée le soir à Lyon avec la probabilité $1/4$, tandis qu'elle est laissée à Marseille avec la probabilité $3/4$;
– si elle est louée à Lyon, alors elle est laissée à Rennes avec la probabilité 12, laissée à Marseille avec la probabilité $1/4$, et ramenée à Lyon avec la probabilité $1/4$;
– si elle est louée à Marseille, elle est laissée à Rennes avec la probabilité $1/2$, laissée à Lyon avec la probabilité $1/4$, et ramenée à Marseille avec la probabilité $1/4$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note R_n (respectivement L_n, M_n) l'événement « la voiture se trouve à Rennes. (respectivement Lyon, Marseille) le soir du n-ième jour ».
On note les probabilités : $r_n = P(R_n)$, $l_n = P(L_n)$, $m_n = P(M_n)$ et on suppose qu'au départ, la voiture est à Rennes

1. (a) Expliciter r_0 , l_0 et m_0.
   (b) Déterminer, pour tout entier naturel n, des relations liant r_{n+1} , l_{n+1} et m_{n+1} à r_n , l_n et m_n
   (c) Montrer que la suite $(l_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante.
   (d) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$, on a : $r_{n+1} = \dfrac{1-r_n}{2}$.
   En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de r_n en fonction de n.
   (e) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de m_n en fonction de n.
2. Le soir d'un jour donné, si on désire, où qu'elle se trouve, rapatrier la voiture à Rennes, le coût de cette opération est de 100 euros si la voiture est à Lyon, de 150 euros si la voiture est à Marseille, et évidemment nul si la voiture est à Rennes. On note X_n la variable aléatoire égale au coût de cette opération le soir du n-ième jour.
   (a) Donner la loi de X_n.
   (b) Calculer l'espérance mathématique de X_n.
3. La société propose un porte-clés comme cadeau pour chaque location. On estime qu'en moyenne trois clients sur quatre acceptent ce cadeau. On admet que la société a eu 10 000 clients au cours d'une année.
   Déterminer la probabilité que la société ait offert plus de 7600 porte-clés au cours de l'année sachant qu'elle en a offert au moins 7500.

Exercice 2

1. On considère la matrice G ,carrée d'ordre 3, définie par : $G = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
   (a) Déterminer les valeurs propres et les espaces propres associés de G.
   (b) En déduire une matrice P inversible telle que la matrice $D = P^{-1}GP$ soit une matrice diagonale.
   (c) Calculer explicitement P^{-1}, la matrice inverse P.
   (d) Déterminer, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, l'expression de la première colonne de la matrice G^n.
2. Expliquer comment ce calcul permet de retrouver, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, les valeurs de r_n, l_n, et m_n obtenues dans l'exercice 1.

Ce sujet est à rendre au jury à la fin de l'épreuve, mais vous avez toute liberté d'utilisation (inscription, surlignement, ...)

Agrégation interne de Sciences économiques et sociales - Session 2008
Épreuve de Mathématiques - sujet B

Exercice 1

On suppose que N est un entier naturel non nul fixé et on lance une pièce équilibrée N fois de suite.
On note X la variable aléatoire réelle égale au rang où apparait PILE pour la première fois , et on convient que si PILE n'est pas apparu au cours des N lancers , la variable X prend la valeur 0.
Ainsi :

$$\begin{cases} \text{si PILE n'est pas apparu au cours des } N \text{ lancers,} & X = 0 \\ \text{si PILE est apparu pour la première fois au rang } k, & X = k \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations suivantes : $\begin{cases} u_0 = 1 & \text{et} \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = 2u_n + n - 1 \end{cases}$

2. (a) Calculer u_1 , u_2 et u_3.
   (b) Montrer que pour tout entier naturel n , $u_n \geqslant 1$ et $u_n \geqslant n$.
   Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
   (c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
3. On pose pour tout entier naturel n : $\quad v_n = n + u_n$.
   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n uniquement.
4. (a) En reprenant la définition de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, vérifier que pour tout entier naturel n : $\dfrac{u_{n+1}-1}{2^n} = \dfrac{u_n - 1}{2^{n-1}} + \dfrac{n}{2^n}$.
   (b) En déduire par récurrence que pour tout entier naturel n non nul $\dfrac{u_n - 1}{2^{n-1}} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k}$
   (c) Montrer finalement que pour tout entier naturel non nul n : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+1}{2^{n-1}}$.
   (d) En déduire en fonction de N l'espérance de la variable aléatoire X.

Exercice 2

On considère deux fonctions notées g et h :
La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\quad g(x, y) = 2e^{-x} + 3x^2 - 2xy + y^2$.
La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par : $\quad h(x) = 2e^{-x} + 2x^2$.

1. Montrer que l'équation $2x - e^{-x} = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ admet une solution unique notée α.
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 de g.
   (b) Montrer que le seul point critique de g est le point $M = (\alpha, \alpha)$.
   (c) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de g.
   Montrer que g présente en M un minimum local de valeur $2\alpha(2 + \alpha)$.
3. (a) Montrer que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $g(x, y) \geqslant h(x)$.
   (b) Etudier les variations de h et montrer que h présente en $x = \alpha$ un minimum global.
   (c) En déduire que le minimum local présenté en M est aussi un minimum global pour g.

Ce sujet est à rendre au jury à la fin de l'épreuve, mais vous avez toute liberté d'utilisation (inscription, surlignement, ...)

Agrégation interne de Sciences économiques et sociales - Session 2008
Épreuve de Mathématiques - sujet C

Exercice 1

1. Étude préliminaire de la suite $(1 + x/n)^n$

Dans toute cette question, on désigne par x un nombre réel positif donné.

a. On considère la fonction définie pour tout nombre réel $t > 0$ par $f(t) = t \ln\left(1 + \frac{x}{t}\right)$

Calculer $f'(t)$ et $f''(t)$ et montrer que $f''(t) \leq 0$ pour $t > 0$.

Calculer la limite de $f'(t)$ quand t tend vers $+\infty$ et montrer que $f'(t) \geq 0$ pour $t > 0$.

En déduire le sens de variation de la fonction f sur $]0, +\infty[$.

b. On considère la suite définie pour tout nombre entier $n \geq 1$ par : $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

- Calculer et comparer u_1, u_2, u_3.
- Déduire de l'étude de f le sens de variation des suites $(\ln(u_n))$ et (u_n).
- Calculer la limite de (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

2. Taux d'intérêt annuel et taux d'intérêt sur une fraction de l'année.

On considère une somme S_0 que l'on place de différentes façons.

a. On place S_0 durant une année au taux d'intérêt annuel $r > 0$. De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?

b. On subdivise l'année en n périodes de durées égales, et l'on place S_0 durant une année à un taux d'intérêt égal à r/n pour chacune des périodes.

De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?

Déterminer la limite de celle-ci lorsque n tend vers $+\infty$.

Comparer ces deux placements des questions **a.** et **b.**, et conclure.

c. On subdivise l'année en n périodes de durées égales, et l'on place S_0 durant une année à un taux d'intérêt égal à r_n pour chacune des périodes (où r_n est donc indépendant de la période considérée).

- De quelle somme dispose-t-on à l'issue d'une année de placement ?
- Exprimer r_n en fonction de r et de n pour que le placement d'une somme rapporte les mêmes intérêts, que celle-ci soit placée à l'année au taux d'intérêt annuel r ou à l'année divisée en n périodes au taux d'intérêt par période r_n.

Exercice 2

Une entreprise fabrique des jouets électroniques. Après la fabrication de ces jouets, l'entreprise effectue des contrôles à la suite desquels 0,6% des jouets restent défectueux : un jouet contrôlé a ainsi la probabilité $0,006$ de rester défectueux. On considère un lot de n jouets contrôlés et parmi ceux-ci, on appelle X le nombre de jouets restant défectueux.

1. Sur n jouets contrôlés, quelle est la probabilité qu'il ne reste aucun jouet défectueux ? quelle est la valeur maximale de pour laquelle cette probabilité est supérieure ou égale à $0,5$?
2. Quelle est la loi de la variable aléatoire X ? (on justifiera avec soin le résultat).
3. Pour $n = 500$, par quelle loi peut-on approcher la loi de la variable aléatoire X ?
   En déduire, pour cette valeur de n, une approximation de la probabilité qu'il y ait au plus deux jouets restant défectueux.
4. Pour $n = 10\ 000$, par quelle loi peut-on approcher la loi de la variable aléatoire X ?
   en déduire, pour cette valeur de n, une approximation de la probabilité qu'il y ait entre 50 et 70 (au sens large) jouets restant défectueux.
5. Les n jouets sont vendus (n est fixé, quelconque) et le retour à l'entreprise ainsi que la réparation d'un jouet défectueux coûtent 40 euros. Sur ces n jouets, soit Y le prix de revient total des retours et réparations.
   Exprimer Y en fonction de X et en déduire l'espérance de Y.
   De combien doit-on majorer le prix de vente de chacun de ces n jouets pour couvrir le frais entraînés par la réparation des jouets défectueux dans ce lot de n jouets ?

Ce sujet est à rendre au jury à la fin de l'épreuve, mais vous avez toute liberté d'utilisation (inscription, surlignement, ...)

Agrégation interne de Sciences économiques et sociales - Session 2008
Épreuve de Mathématiques - sujet D

1. On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) &= 10e^{-0,1x}\ln(1+e^{0,1x}) \\ g(x) &= \dfrac{10}{e}\ln(1+e^{0,1x}) \end{cases}$
   (a) Etude de f : Etudier les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$. Calculer $f'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   Prouver que : $\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant \ln(1+t) - \dfrac{t}{1+t}$. En déduire le signe de $f'(x)$.
   (b) Etude de g : Déterminer le sens de variation de g et les limites de g en $+\infty$ et $-\infty$.
   (c) On note C_f et C_g les courbes représentatives de f et g.
      i. Déterminer les coordonnées du point d'intersection de C_f et C_g.
      ii. Tracer C_f et C_g dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unités : 0,5 cm sur $(O, \overrightarrow{i})$ et 1 cm sur $(O, \overrightarrow{j})$ avec x variant de -25 à 25)
2. Sur $\mathbb{R}_+$, f est la fonction de demande d'un bien sur un marché et g est la fonction d'offre de ce même bien.
   (a) Déterminer la quantité x_0 et le prix p correspondant à l'équilibre du marché.
   (b) Le prix du bien étant fixé à p, le consommateur achète x_0 unités au prix p; la différence entre ce qu'il était prêt à payer et ce qu'il paie réellement est représentée par l'aire de la partie du plan limitée par C_f, les droites d'équations $x = 0, \quad x = x_0, \quad y = p$. Cette aire est appelée surplus du consommateur SC.
      i. A l'aide du changement de variable $t = e^{0,1x}$, établir que : $\text{SC} = 100 \displaystyle\int_1^e \frac{\ln(1+t)}{t^2}dt - 10f(10)$.
      ii. Prouver qu'il existe a et b réels tels que : $\forall t \in \mathbb{R}_+^\times, \quad \dfrac{1}{t(1+t)} = \dfrac{a}{t} + \dfrac{b}{1+t}$.
      iii. Donner la valeur exacte de SC et sa valeur arrondie à 10^{-2} près au plus proche.

Exercice 1

Soit n un entier naturel non nul et X une variable aléatoire réelle discrète dont l'ensemble des valeurs prises $X(\Omega)$ est inclus dans l'ensemble $\{0, 1, ..., n\}$. $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kp(X = k)$ est l'espérance mathématique de X.

L'objectif de cet exercice est de prouver et d'utiliser l'égalité $E(X) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} p(X \geqslant k)$, notée (**R**).

1. Etude d'un exemple. Soit X qui suit une loi binomiale de paramètres 2 et $\dfrac{3}{4}$.
   (a) Calculer $p(X \geqslant 1) + p(X \geqslant 2)$.
   (b) Donner la valeur de l'espérance $E(X)$. Vérifier l'égalité (**R**).
2. On revient au cas général : X est telle que $X(\Omega)$ est inclus dans l'ensemble $\{0, 1, ..., n\}$.
   (a) Justifier pour $k \in \{1, ..., n\}$ l'égalité : $p(X \geqslant k) = p(X = k) + p(X = k+1) + ... + p(X = n)$
   (b) En écrivant puis en sommant les égalités précédentes de $k = 1$ à n, en déduire l'égalité (**R**).
3. Un jeu vidéo est constitué de n niveaux successifs.
   Lorsque le joueur commence un niveau, ce qui suppose qu'il ait réussi tous les niveaux précédents, la probabilité qu'il le réussisse est $\dfrac{2}{3}$. Le jeu s'arrête dès que le joueur échoue à un niveau.
   On note X la variable aléatoire égale au nombre de niveaux réussis par le joueur.
   (a) Donner $X(\Omega)$.
   (b) Pour tout entier naturel k de $\{1, ..., n\}$, déterminer $p(X \geqslant k)$ en fonction de k.
   (c) En utilisant la formule (**R**), calculer l'espérance $E(X)$.

Ce sujet est à rendre au jury à la fin de l'épreuve, mais vous avez toute liberté d'utilisation (inscription, surlignement, ...)

Agrégation interne de Sciences économiques et sociales - Session 2008
Épreuve de Mathématiques - sujet E

Exercice 1

1. Montrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ strictement positif est égale à $\frac{1}{\lambda}$.
2. On suppose que la durée d'utilisation, en mois, d'un pneu de vélo neuf, avant qu'il ne crève, est une variable aléatoire, notée X, suivant la loi exponentielle de paramètre $0,05$.
   (a) Préciser l'espérance de X.
   (b) Quelle est la probabilité qu'un pneu ne crève pas pendant les deux premières années de son utilisation ?
   (c) Sachant qu'au bout d'un an d'utilisation, le pneu n'a pas crevé, quelle est la probabilité qu'il ne crève pas au cours des deux années suivantes ?
3. Déterminer le réel positif μ vérifiant : $\mathbf{P}([X > \mu]) = \frac{1}{2}$.
4. On considère un vélo muni de deux pneus neufs et on note X_1 la variable aléatoire représentant la durée d'utilisation, jusqu'à sa première crevaison, du pneu avant et, de même, on note X_2 la variable aléatoire représentant la durée d'utilisation du pneu arrière jusqu'à sa première crevaison.
   On suppose que les variables X_1 et X_2 suivent la même loi que X et que, pour tout couple (X_1, X_2) de réels, les événements $[X_1 \leqslant x_1]$ et $[X_2 \leqslant x_2]$ sont indépendants.
   On note T la variable aléatoire égale à la durée d'utilisation du vélo avant que l'un ou l'autre des deux pneus ne crève.
   (a) Pour tout réel positif t, exprimer l'événement $[T > t]$ à l'aide des variables X_1 et X_2 et en déduire la fonction de répartition de la variable T. Reconnaître la loi de T et donner la valeur de son espérance.
   (b) On note T' la variable aléatoire égale au plus grand des deux nombres (aléatoires) X_1 et X_2.
      i. Pour tout réel positif t, exprimer l'événement $[T' \leqslant t]$ à l'aide des variables X_1 et X_2 et en déduire la fonction de répartition de la variable T' puis une densité de celle-ci.
      ii. Calculer l'espérance de T'. Pourquoi, intuitivement, pouvait-on prévoir l'encadrement : $20 \leqslant E(T') \leqslant 40$?
   (c) Déterminer les réels m et m' vérifiant : $\mathbf{P}([T > m]) = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P}([T' > m']) = \frac{1}{2}$

Exercice 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. (a) Calculer A^2 et A^3.
   (b) Quelles sont les valeurs propres de A ?
   (c) A est-elle diagonalisable ? A est-elle inversible ?
2. On se propose de montrer qu'il n'existe pas de matrice carrée X telle que $X^2 = A$.
   (a) Montrer que si une telle matrice existe alors $AX = XA$.
   (b) En déduire que X est de la forme $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
   (c) Montrer que $a = 0$.
   (d) Conclure.

Ce sujet est à rendre au jury à la fin de l'épreuve, mais vous avez toute liberté d'utilisation (inscription, surlignement, ...)