Sujet n°1

Exercice 1 :

On s'intéresse dans ce sujet à un modèle de politique de limitation des naissances (de type « à la chinoise »).

On suppose que dans la population étudiée, la probabilité pour une femme d'avoir un premier enfant est de 0,9.

On admet, pour une femme attendant un enfant, l'équiprobabilité entre naissance d'une fille et naissance d'un garçon.

Si une femme est mère d'un premier enfant, la politique de limitation des naissances adoptée a pour effet que :

- si ce premier enfant est un garçon, la probabilité pour la femme d'avoir un second enfant est nulle.
- si le premier enfant est une fille, la probabilité pour la femme d'avoir un deuxième enfant est de 0,3.

On exclut dans tous les cas la possibilité d'une troisième naissance.

1) Calculer la probabilité d'être mère d'une fille pour une femme mère d'un garçon.

2) Déterminer la loi de probabilité et l'espérance mathématique de la variable aléatoire N égale au nombre d'enfants par femme de la population.

3) Déterminer la loi de probabilité et l'espérance mathématique de la variable aléatoire F égale au nombre de filles par femme de la population.

4) Quelle est l'espérance mathématique de la variable aléatoire G égale au nombre de garçons par femme de la population ? commenter.

Exercice 2 :

On distingue dans la population d'un pays les jeunes, les adultes et les personnes âgées. On note la population d'une période n par une matrice colonne :

$$\mathrm{P}_n = \begin{pmatrix} j_n : \textit{nombre de jeunes} \\ a_n : \textit{nombre d' adultes} \\ p_n : \textit{nombre de personnes agées} \end{pmatrix}$$

Entre les périodes n et n+1, on a la relation : $P_{n+1} = A.P_n$ avec A= $\begin{pmatrix} 0 & 1,2 & 0 \\ 0,9 & 0 & 0 \\ 0 & 0,8 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Interpréter les coefficients de la matrice A. La matrice A est-elle inversible ?

2) On donne la matrice $P_2 = \begin{pmatrix} 270 \\ 270 \\ 180 \end{pmatrix}$; calculer P_3.

On se propose de déterminer une méthode pour obtenir à partir d'une répartition de la population celle de la précédente.

3) Soit la répartition : $P_n = \begin{pmatrix} j_n \\ a_n \\ p_n \end{pmatrix}$; on pose : $P_{n+1} = \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \\ p_{n+1} \end{pmatrix}$.

Déterminer une matrice carrée d'ordre 2, M, telle que : $\begin{pmatrix} j_n \\ a_n \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} j_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix}$.

4) On pose à présent $P_{n-1} = \begin{pmatrix} j_{n-1} \\ a_{n-1} \\ p_{n-1} \end{pmatrix}$; exprimer j_{n-1} et a_{n-1} en fonction de j_{n+1} et a_{n+1}.

En déduire l'expression de p_n en fonction de a_{n+1}, et construire une matrice carrée d'ordre 3, A', telle que : $P_n = A'.P_{n+1}$.

5) Application numérique :

A partir de la répartition $\begin{pmatrix} 270 \\ 270 \\ 180 \end{pmatrix}$, déterminer la répartition de la génération précédente.

<u>Exercice 3 :</u>

Deux projets d'investissements, P_1 et P_2, représentent tous deux une dépense de 2 500 unités monétaires (u.m.) l'année 0.

Pour le projet P_1, les retours attendus sont de 1 000 u.m. les trois années suivantes. Pour le projet P_2, les retours attendus sont de 800 u.m. la première année, 1 430 u.m. la deuxième année, et 769 u.m. la troisième année.

1) Calculer les valeurs actualisées nettes à l'année 0, $V_1(i)$ et $V_2(i)$, de chaque projet pour chacune des valeurs suivantes du taux d'actualisation annuel i : a) i=4% ; b) i=12%.

2) Justifier simplement le sens de variation des valeurs actualisées nettes (à l'année 0) V_1 et V_2 en fonction du taux d'actualisation annuel i, et démontrer que ces fonctions s'annulent une fois et une seule sur l'intervalle $[0 ;+\infty[$.

3) En décrivant la méthode employée, déterminer une valeur approchée du taux de rentabilité interne de chacun des projets.

SUJET n°2

Exercice 1 :

Loi de « durée de vie sans vieillissement ».

On s'intéresse à la mise en place d'une loi de probabilité décrivant la durée de vie de certains objets, pour lesquels le vieillissement ne modifie pas la probabilité de fin de fonctionnement (c'est le cas de produits, comme certaines ampoules électriques ; c'est aussi le modèle utilisé pour étudier la désintégration des noyaux d'éléments radioactifs).
On suppose précisément que :

- La durée de vie du produit est modélisée par une loi de probabilité P à densité continue f sur $[0\,;+\infty[$.
- La probabilité conditionnelle, pour ce produit, de cesser de fonctionner entre les instants t et $t+s$ ne dépend pas de son « âge » t : c'est cette propriété qui vaut à ce type de loi la qualification de « durée de vie sans vieillissement ».

Pour un intervalle I contenu dans $[0\,;+\infty[$, on notera $P(\mathrm{I})$ la probabilité pour que le produit considéré cesse de fonctionner à un instant t élément de I.

On appelle F la fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $F(t) = P([0\,;t]) = \int_0^t f(x)\ dx$.

Question 1 :
Vérifier que pour tous réels positifs a et b, on a : $P([a\,;b])=F(b)-F(a)$ et $P([a\,;+\infty[) = 1 - F(a)$.

Question 2 :
a) Comment s'interprète, pour t et s positifs, la probabilité conditionnelle $P_{[t;+\infty[}([t;t+s])$? (probabilité de $[t\,;t+s]$ sachant que $[t\,;+\infty[$ est réalisé)
b) Justifier que, pour t et s positifs, on a : $P_{[t;+\infty[}([t;t+s]) = F(s)$
c) En déduire, pour tous t et s positifs, la relation : $F(s) \times (1 - F(t)) = F(t+s) - F(t)$.

Question 3 :
On appelle G la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;+\infty[$ par : $G(t) = 1 - F(t)$
a) Déterminer $G(0)$.
b) Justifier que G est dérivable et préciser sa fonction dérivée.
c) Démontrer, pour tous réels positifs t et s, la relation : $G(t+s) = G(t) \times G(s)$.
d) En déduire l'existence d'un réel k tel que, pour tout réel t positif, on a : $F(t) = 1 - e^{kt}$

Question 4 :
a) Préciser la limite de F en $+\infty$.
Que peut-on en déduire pour le signe de k ?
b) Démontrer que la densité f de la loi de probabilité P est une fonction définie sur $[0\,;+\infty[$ par : $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$, où λ est un réel strictement positif.

Question 5 :
Calculer en fonction de λ le temps τ tel que : $P([0\,;\tau]) = 0{,}5$.
Ce réel τ est souvent appelé la demi-vie ou encore la période de l'objet étudié (en particulier dans le cas de l'étude de la durée de vie des noyaux d'un élément radioactif).

Exercice 2 :

On s'intéresse, pour une génération d'hommes donnée, à la répartition entre les « riches » et les « pauvres ».
La génération « numéro n », où n est un entier naturel, sera notée par un vecteur colonne :

$G_n = \begin{pmatrix} r_n \\ p_n \end{pmatrix}$ où r_n et p_n désignent respectivement les nombres de « riches » et de « pauvres » à la génération numéro n. G_{n+1} désigne alors la génération suivante (celle des fils).

On suppose qu'on a la relation (R) : $G_{n+1} = A.G_n$, avec A = $\begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}8 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

Question 1 :

Après avoir calculé les produits A.$\begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}$ et A.$\begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix}$, donner une interprétation des coefficients de la matrice A.

Question 2 :

Montrer que l'accroissement relatif de la population d'une génération à l'autre est fonction de la composition de la population initiale. Entre quelles bornes varie-t-il ?

Question 3 :

a) Déterminer le réel α tel que, si $\begin{pmatrix} \alpha \\ 100-\alpha \end{pmatrix}$ représente une génération, alors la génération suivante admet une structure identique en termes de proportion de « riches » et de « pauvres ».

b) Que représente le vecteur $\begin{pmatrix} \alpha \\ 100-\alpha \end{pmatrix}$ pour la matrice A ? à quel réel particulier peut-on l'associer ?

c) Préciser une valeur approchée par excès à 10^{-2} près de α . En utilisant cette valeur, calculer le taux d'accroissement de la population entre la génération représentée par $\begin{pmatrix} \alpha \\ 100-\alpha \end{pmatrix}$ et la suivante.
Si on admet que trente ans séparent une génération de la suivante, déterminer le taux annuel correspondant.